

Theorie II. Ordnung: Theorie und Umsetzung im Rahmen des Verschiebungsgrößenverfahrens

Alexandra Wahn

1. Einleitung und Motivation

In der Baupraxis ist die Annahme infinitesimal kleiner Verformungen nicht immer gerechtfertigt, sodass das Gleichgewicht am verformten System aufgestellt werden muss. Dies ist Grundlage der Theorie II. Ordnung. In dieser Arbeit wird das Verschiebungsgrößenverfahren nach der nichtlinearen Theorie, sowie deren Implementierung in das Finite-Elemente-Programm FEAP erarbeitet.

2. Schriftgrößen

Der Unterschied zur linearen Theorie ist die geometrische Nichtlinearität. Sie zeigt sich über einen zusätzlichen nichtlinearen Steifigkeitsanteil, der durch das Gleichgewicht am verformten System entsteht.

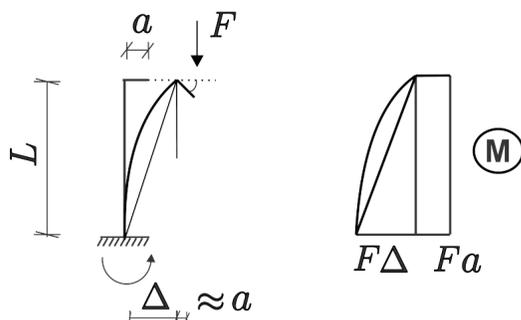


Abbildung 1: Gleichgewicht am verformten System

Ursache der Veränderung der linearen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_L zur nichtlinearen Matrix \mathbf{K}^{II} ist die zusätzlich auftretende Stablängskraft S . Die Nichtlinearität folgt aus der Verformungsabhängigkeit dieser Größe. Um das Verschiebungsgrößenverfahren, welches nur unter Voraussetzung des Superpositionsprinzips anwendbar ist, jedoch auch nach der nichtlinearen Theorie zu ermöglichen, wird S als verschiebungsunabhängig und damit als schrittweise konstant angenommen. Es resultiert eine linearisierte Theorie II. Ordnung.

3. Iterationsverfahren

Das Verschiebungsgrößenverfahren nach der linearisierten Theorie II. Ordnung entspricht einem Iterationsverfahren, dem Sekantenverfahren. Unterschreitet das Residuum einen festgelegten Toleranzwert kann das Iterationsverfahren abgebrochen werden. Die Gleichgewichtsbedingung ist erfüllt. Neben dem Sekantenverfahren liefert eine Iteration über die Lastspalte dasselbe Ergebnis. Hierbei wird \mathbf{K}_L für jeden Iterationsschritt verwendet und damit entfällt die ständige Aktualisierung von \mathbf{K}^{II} . Eine Separierung der Matrix in einen linearen und einen geometrischen Anteil, \mathbf{K}_L und \mathbf{K}_{geo} , ermöglicht dieses Vorgehen.

$$\mathbf{K}^{II} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{geo}$$

Der Nachteil dieser Methode ist jedoch die langsamere Konvergenz.

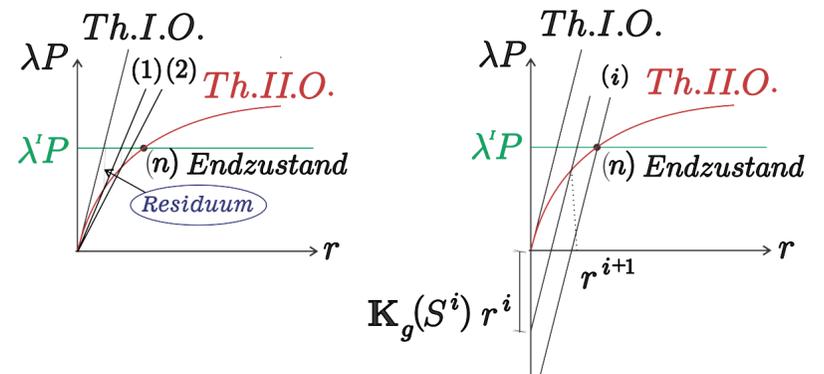


Abbildung 1: Sekantenverfahren und Iteration über die Lastspalte

4. Numerische Beispiele

Die Gegenüberstellung der Eckmomente eines Hallenrahmens nach der linearen und der nichtlinearen Theorie demonstriert den Einfluss der Stablängskraft S .

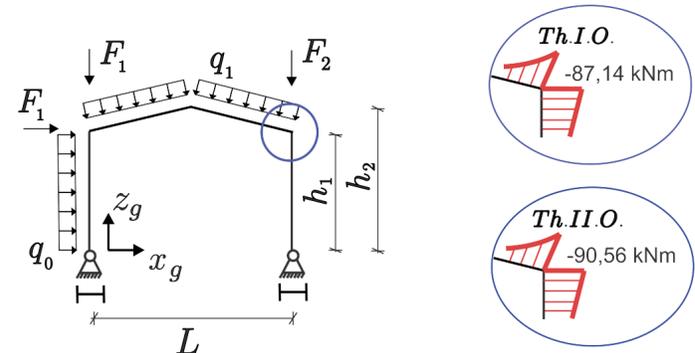


Abbildung 3: Eckmomente nach Theorie I. und II. Ordnung

5. Ausblick

Der Aspekt der Wirtschaftlichkeit und Tragsicherheit bei der Bemessung einer Konstruktion verdeutlicht die Relevanz der nichtlinearen Theorie. Eine Nachweisführung nach der linearen Theorie liefert aufgrund der Betrachtung des unverformten Systems u.U. unsichere Ergebnisse. Der Stabilitätsnachweis nach dem Ersatzstabverfahren gewährleistet zwar eine ausreichende Sicherheit, das Ergebnis ist im Gegensatz zu dem der nichtlinearen Theorie jedoch unwirtschaftlicher. Durch den Ansatz von Imperfektionen, der die Vorverformungen berücksichtigt, bietet die Theorie II. Ordnung eine ausreichende Tragsicherheit und liefert ein wirtschaftliches Ergebnis bei der Bemessung eines statischen Systems.