

Nichtlineare konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung inkompressibler Werkstoffe

Oleg Birkholz

1. Motivation und Ziele

Strukturen aus Elastomeren, wie beispielsweise Brückenlager im Bauwesen, können sich selbst unter großen Deformationen elastisch verformen. Gleichzeitig neigen derartige Werkstoffe dazu, sich inkompressibel, also volumenerhaltend, zu deformieren. Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung von Vorgängen großer Verformungen reichen lineare Ansätze nicht mehr aus und müssen folglich um etwaige Nichtlinearitäten erweitert werden.

Ziel der Arbeit ist es zunächst, volumetrisch-isochor entkoppelte hyperelastische Stoffgesetze vorzustellen und im FE-Programm FEAP zu implementieren. Selbige Konstitutivgesetze sind in der Lage, sowohl der materiellen Nichtlinearität als auch der Zwangsbedingung der Inkompressibilität Rechnung zu tragen. Anschließend werden nichtlineare, gemischt formulierte B_k/P_{k-1} -Elemente vorgestellt, die insbesondere Volumen-Locking vermeiden.

2. Entkoppelte hyperelastische Stoffgesetze

Durch den multiplikativen Split des Deformationsgradienten \mathbf{F} in seinen volumetrischen und isochoren Anteil \mathbf{F}_{vol} und \mathbf{F}_{iso}

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \mathbf{F}_{\text{iso}} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}}, \quad (1)$$

ist es nunmehr möglich, die Verzerrungsenergie $W = \rho_0 \psi$ additiv mittels

$$W = W(\mathbf{C}) = \underbrace{W(J)}_{W_{\text{vol}}} + \underbrace{W(\bar{\mathbf{C}})}_{W_{\text{iso}}} \quad (2)$$

als Funktion von \mathbf{C} darzustellen. Darin ist $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ der modifizierte rechte Cauchy-Green Tensor und $J = \det \mathbf{F}$ die Jacobideterminante.

Mit Hilfe (2) lassen sich konstitutive hyperelastische Stoffgesetze

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{vol}} + \mathbf{S}_{\text{iso}} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial W_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3)$$

in entkoppelter Form darstellen. Basierend darauf werden Stoffgesetze nach Ogden, Neo-Hooke und Mooney-Rivlin innerhalb von FEAP implementiert.

3. Dreifeld-Formulierung

Untersuchungen zeigen, dass rein verschiebungsbasierte B_k -Elemente, wobei k die Ansatzordnung repräsentiert, insbesondere zu Volumen-Locking neigen. Dies rührt daher, dass Volumenkonstanz mittels $J = 1$ an jedem Gauß-Punkt eingefordert wird und dadurch übermäßig viele Zwangsbedingungen in das System eingebracht werden. Letztere werden durch das Einführen zweier weiterer, innerer Freiheitsgrade, dem Druck p und der Volumenänderung θ , auf das gesamte Elemente verschmiert und somit aufgeweicht.

Analog zu (1) gelingt es, mit einer weiteren Modifizierung

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{vol}} \mathbf{F}_{\text{iso}} = \left(\frac{\theta}{J} \right)^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (4)$$

des Deformationsgradienten die Verzerrungsenergiefunktion

$$W = W(\mathbf{C}) = W(\theta) + W(\bar{\mathbf{C}}) \quad (5)$$

in Abhängigkeit des neu eingeführten Freiheits θ auszudrücken. Letztlich liefert (5) ein Dreifeld-Funktional

$$\Pi(\mathbf{u}, p, \theta) = \int_B W(\theta) + W(\bar{\mathbf{C}}) + p(J - \theta) dV + \Pi_{\text{ext}} \quad (6)$$

des Hu-Washizu-Typs, dessen Variation und Linearisierung die Basis für die Implementierung der Elemente der B_k/P_{k-1} -Familie liefern.

4. Numerische Auswertung und Fazit

Im Rahmen einer Konvergenzstudie, bei schrittweiser Erhöhung der Netzfeinheit, wird exemplarisch die Leistungsfähigkeit derart gemischt formulierter Volumenelemente demonstriert. Hierfür wird ein Block aus Gummi gemäß Abbildung 1 mittig mit einer Flächenlast versehen und die Vertikalverschiebung des Punktes P untersucht.

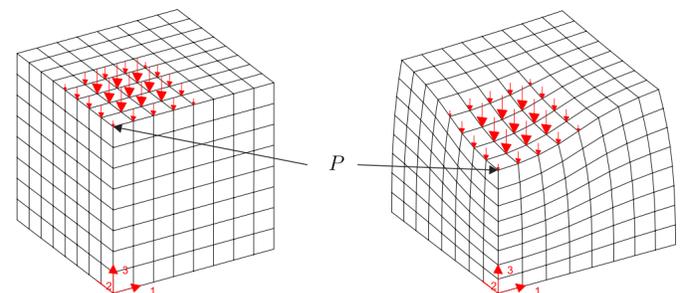


Abbildung 1: FE-Modell inkompressibler Block

Den Vergleich des Konvergenzverhaltens der unterschiedlichen Elementformulierungen zeigt Abbildung 2.

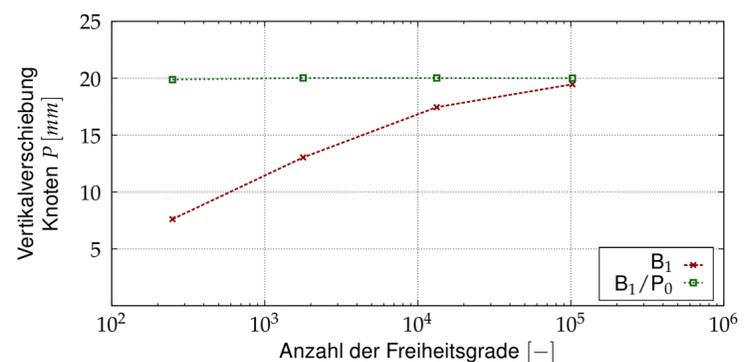


Abbildung 2: Konvergenzverhalten inkompressibler Block

Hierin wird deutlich, dass bereits für $k = 1$ das gemischte B_1/P_0 -Element bei wenigen Freiheitsgraden die zu erzielende Verschiebung erreicht. Dem gegenüber steht das verschiebungsbasierte B_1 -Element gleicher Ansatzordnung, das selbst bei sehr feiner Diskretisierung deutliche Versteifungseffekte aufweist.