

Entwicklung einer adaptiven Netzverfeinerungsstrategie für die Diskretisierung von Zufallsfeldern in der Strukturmechanik

Anke Deuble

1. Motivation und Ziele

Die Verwendung von Zufallsfeldern bietet die Möglichkeit Unsicherheiten in der Strukturmechanik besser darzustellen und somit realitätsgetreuere Ergebnisse zu erhalten. Eine effektive Methode zur Diskretisierung von Zufallsfeldern ist die Expansion Optimal Linear Estimation (EOLE). Ein zeitintensiver Schritt der EOLE ist das Lösen des Eigenwertproblems. Daher wird mit der Entwicklung einer adaptiven Netzverfeinerungsstrategie die Anzahl der zu bestimmenden Eigenwerte reduziert. Um die Konvergenz der stochastischen Antwort sicherzustellen, wird anschließend eine Monte-Carlo-Simulation (MCS) durchgeführt.

2. Diskretisierung von Zufallsfeldern

Ein Zufallsfeld $H(\mathbf{x}, \theta)$ beschreibt eine Zufallsvariable an jedem Ort $\mathbf{x} \in \Omega$ und ein Zufallsfeld mit

$$\{H(\mathbf{x}, \theta) : \mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta\}$$

stellt eine Sammlung von Zufallsvariablen dar. Die Diskretisierung des Zufallsfelds \hat{H} mit der EOLE erfolgt mit

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sigma \left(\sum_{i=1}^M \frac{\xi_i(\theta)}{\sqrt{\lambda_i}} \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{x}^S) \right) \mathbf{C}(\mathbf{x}^S, \mathbf{x})$$

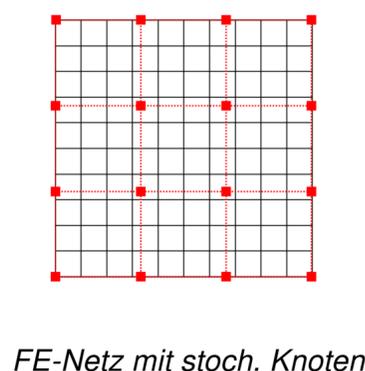
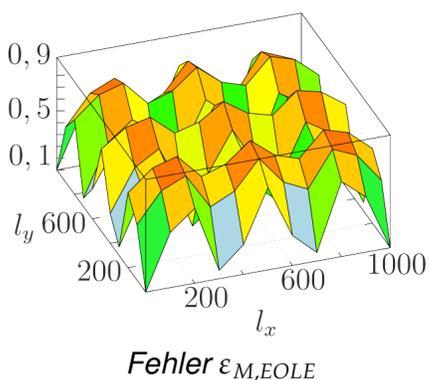
$\xi_i(\theta)$ sind normalverteilte Zufallsvariablen, $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}^S)$ die Eigenvektoren und λ_i die Eigenwerte der Kovarianzmatrix \mathbf{C} basierend auf den stochastischen Knoten \mathbf{x}^S . Die Einträge der Kovarianzmatrix werden mit der Korrelationsfunktion

$$C(\mathbf{x}_i^S, \mathbf{x}_j^S) = \exp \left[-\frac{d^2(\mathbf{x}_i^S, \mathbf{x}_j^S)}{l_c} \right]$$

berechnet. Dabei ist d der Abstand der Knoten und l_c die Korrelationslänge. Die Interpolation von den stochastischen Knoten auf die FE-Knoten erfolgt durch die Korrelationsfunktion $C(\mathbf{x}^S, \mathbf{x})$. Bei der Diskretisierung mit der EOLE entsteht ein Fehler der Varianz. Dieser wird mit

$$\varepsilon_{M,EOLE} = \text{Var}[H(\mathbf{x}) - \hat{H}(\mathbf{x})] = \sigma^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^M \frac{1}{\lambda_i} (\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{C}(\mathbf{x}^S, \mathbf{x}))^2$$

berechnet.

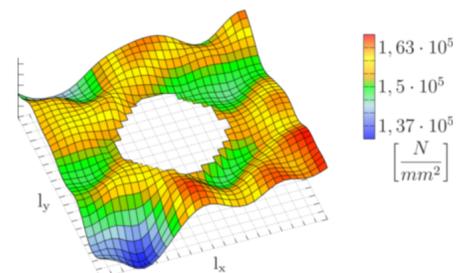
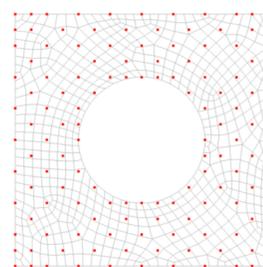


3. Adaptive Netzverfeinerung

Die drei entwickelten Strategien sind die Punktverfeinerung, quadratische Verfeinerung und dreieckige Verfeinerung. Alle Methoden werten den Fehler $\varepsilon_{M,EOLE}$ aus. Falls dieser größer als ein vorgegebener Fehler ist, wird eine Verfeinerung durchgeführt. Bei der Punktverfeinerung werden stochastische Knoten auf die FE-Knoten mit dem maximalen Fehler $\varepsilon_{M,EOLE}$ gesetzt. Bei der quadratischen und dreieckigen Verfeinerung werden stochastische Elemente gebildet. Das stochastische Element mit dem größten Fehler wird dann verfeinert.

4. Numerische Beispiele

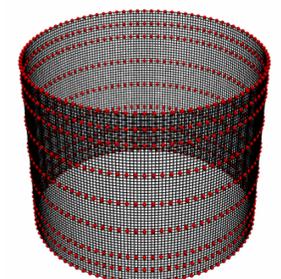
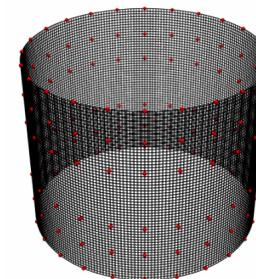
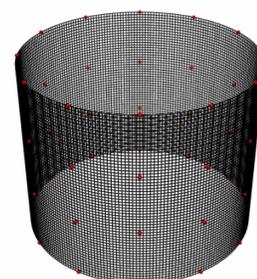
Es wird eine Scheibe mit Loch und FE-Netz aus dem Netzgenerator NEGE mit 746 FE-Knoten betrachtet. Über das Zufallsfeld wird der E-Modul der Scheibe gestreut. Die MCS zeigt, dass 75 stochastische Knoten ausreichend sind, um die stochastischen Attribute wie Mittelwert und Varianz der Verschiebung u_x darzustellen. In diesem Beispiel wurde eine dreieckige Verfeinerungsmethode verwendet.



FE-Netz mit stoch. Knoten

Zufallsfeld des gestreuten E-Moduls

Als weiteres Beispiel wird ein Zylinder mit 14701 FE-Knoten und geometrischen Imperfektionen untersucht. Um die stochastische Antwort darzustellen, sind 873 stochastische Knoten ausreichend. Für dieses Beispiel wurde exemplarisch eine quadratische Verfeinerungsmethode verwendet.



Ausgangszustand
52 stoch. Knoten

Erste Iteration
150 stoch. Knoten

Ende der Iteration
873 stoch. Knoten