

Numerische Stabilitätsuntersuchungen von Tragwerken mit zufallsverteilten materiellen Imperfektionen

Marc Fina

1. Motivation und Ziele

In den Ingenieurdisziplinen versucht man durch immer schlankere Tragwerke das Gewicht zu reduzieren. Dabei wird das Stabilitätsversagen maßgebend und die Imperfektionen haben einen immer größeren Einfluss auf die kritischen Lasten. Man unterscheidet zwischen geometrischen und materiellen Imperfektionen. Bei den materiellen Imperfektionen handelt es sich vorwiegend um streuende Materialparameter, wie E-Modul, Schubmodul oder auch Festigkeiten. Diese schwankenden Materialeigenschaften können durch diskrete Zufallsfelder dargestellt werden.

2. Erzeugung stochastisch materieller Imperfektionen

Zur Darstellung der Imperfektionen wird die Methode der Spektraldarstellung verwendet. Die 2D-Formulierung lautet:

$$f^{(i)}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [A_{n_1 n_2}^{(1)} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(1)(i)}) + A_{n_1 n_2}^{(2)} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(2)(i)})]$$

Die Stützstellen können die Knoten- oder Gausspunkte sein. Durch zufallsverteilte Phasenverschiebungen $\phi^{(i)}$ können verschiedene Imperfektionsbilder generiert werden. Die Amplituden $A_{n_1 n_2}^{(1)}$, $A_{n_1 n_2}^{(2)}$ sind definiert zu

$$A_{n_1 n_2}^{(1)} = \sqrt{2S_{ff}(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2}$$

$$A_{n_1 n_2}^{(2)} = \sqrt{2S_{ff}(\kappa_{1n_1}, -\kappa_{2n_2})\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2}$$

mit den Parametern

$$\kappa_{1n_1} = n_1\Delta\kappa_1, \quad \kappa_{2n_2} = n_2\Delta\kappa_2; \quad \Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1}, \quad \Delta\kappa_2 = \frac{\kappa_{2u}}{N_2}$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1; \quad n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$$

Dabei beschreiben die Konstanten κ_{1u} und κ_{2u} die Grenzfrequenz für die jeweilige Richtung. Die Steuerung der Korrelation erfolgt mit den Korrelationsparameter b_i in der Leistungsdichtefunktion:

$$S_{ff}(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\sigma_f^2}{4\pi} b_1 b_2 \exp \left[-\frac{1}{4} (b_1^2 \kappa_1^2 + b_2^2 \kappa_2^2) \right]$$

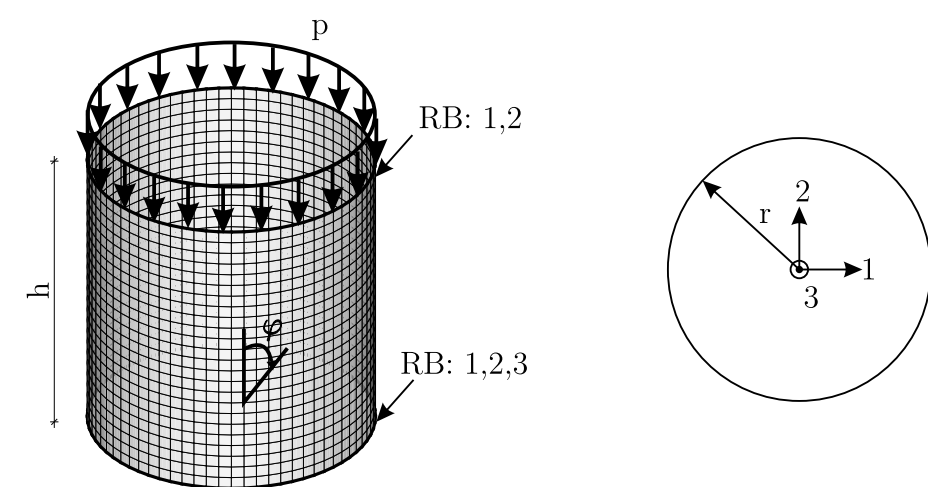
Je größer die Korrelationsparameter, desto stärker ist die Korrelation. σ_f ist die Standardabweichung des Zufallsfeldes. Durch Aufaddieren des Mittelwertes kann die Imperfektion vollständig beschrieben werden.

$$\hat{f}^{(i)}(x_1, x_2) = \mu_0 + f^{(i)}(x_1, x_2)$$

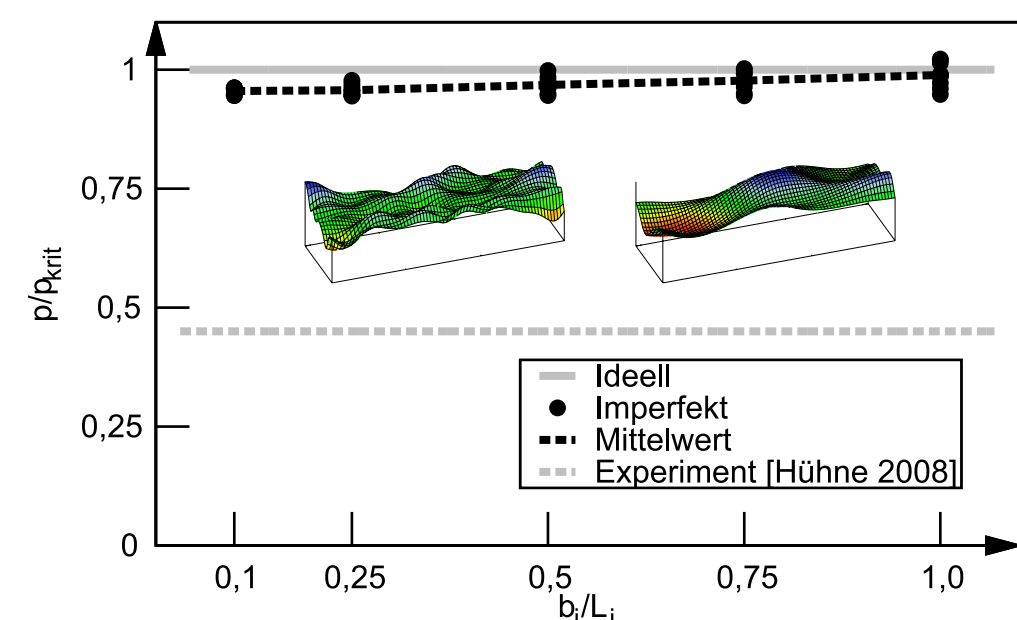
Das Zufallsfeld entspricht nach dem zentralen Grenzwertsatz für $N_i \rightarrow \infty$ einer Normalverteilung.

3. Numerisches Beispiel

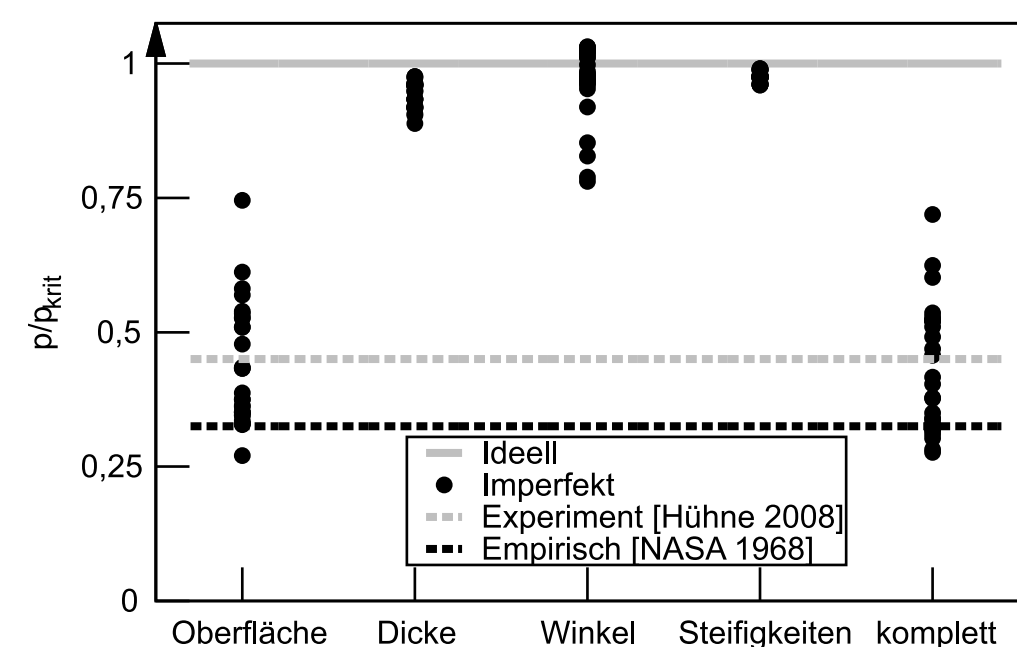
Zur Untersuchung dient ein Zylinder aus CFK unter Axialdruck. Das Laminat besteht aus vier Schichten $[+24^\circ, -24^\circ, +41^\circ, -41^\circ]$.



Zur vollständigen Beschreibung der materiellen Imperfektionen wurde der E-Modul längs und quer zur Faser, der Schubmodul und die Querkontraktionszahl variiert.



Für große Korrelationsparameter strebt die normierte Beullast gegen die ideale Last. Beim Gesamtmodell wurde zur schon implementierten Variation der Oberfläche auch die Schichtdicke und der Faserwinkel mit der Methode der Spektraldarstellung zufallsverteilt generiert.



Die Ausmitten der Oberfläche haben den größten Einfluss auf die Beullast. Allerdings kann der Abfall durch die strukturellen Imperfektionen über 5% betragen. Werden beide Imperfektionarten kombiniert, nimmt die Streuung der kritischen Lasten zu. Daher müssen die materiellen Imperfektionen berücksichtigt werden.