Karlsruher Institut für Technologie

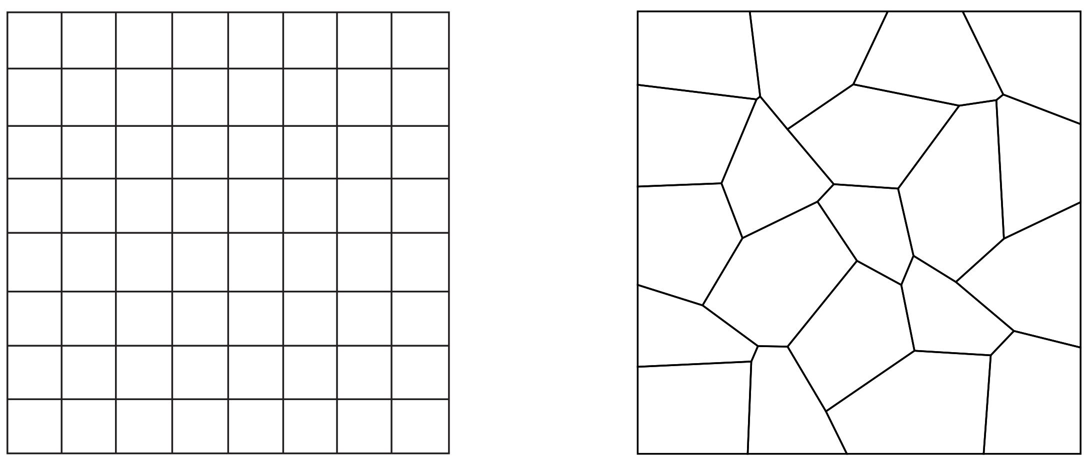
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
S. Freitag

Theorie und Virtuelle-Element-Formulierung eines Scheibenelementes

Florian Fuchs

1. Motivation und Ziele

Die computergestützte Berechnung von baustatischen Problemen ist heutzutage alltäglich in der Tragwerksplanung. Diese Berechnungen werden meist mithilfe numerischer Verfahren durchgeführt, welche eine Approximation der tatsächlichen Lösung liefern. In den meisten Fällen wird hierbei die Finite-Element-Methode (FEM) verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die neuartige Virtuelle-Element-Methode (VEM) betrachtet, welche oft als Verallgemeinerung der FEM angesehen wird. Im Rahmen der VEM können nahezu beliebige Elementgeometrien, wie z.B. konvexe und nichtkonvexe Polygone verwendet werden.



Ziel dieser Arbeit ist die VEM-Formulierung für ein Scheibenelement. Ein Vergleich von VEM und FEM anhand von baustatischen Problemen dient zur Einschätzung dieser neuartigen Methode.

2. Virtuelle-Element-Methode

Die Virtuelle-Element-Methode hat die Besonderheit, dass die verwendeten Ansatzfunktionen nicht explizit konstruiert werden müssen, weshalb diese als virtuell bezeichnet werden. Diese Besonderheit erlaubt der VEM beliebig komplexe Elementgeometrien mit unterschiedlicher Anzahl an Knoten auch innerhalb einer Vernetzung. Bei der Virtuelle-Element-Methode wird eine sogenannte Projektion der Verschiebung konstruiert, welche Anteile an Starrkörperbewegungen, Verzerrungen und einen verbleibenden Rest beinhaltet:

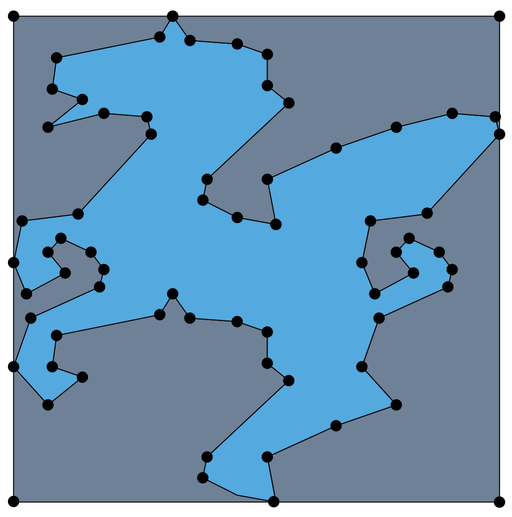
$$\mathbf{u} = \prod_R \mathbf{u} + \prod_C \mathbf{u} + \left(\mathbf{u} - \prod_P \mathbf{u}\right)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix der VEM sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{K}^e = \underbrace{\Omega^e\, \mathbf{W}_C\, \mathbf{E}\, \mathbf{W}_C^T}_{\text{Konsistenz}} + \underbrace{\left(\mathbf{I}_{2nel} - \mathbf{P}_P\right)^T \mathbf{S}\, \left(\mathbf{I}_{2nel} - \mathbf{P}_P\right)}_{\text{Stabilität}}$$

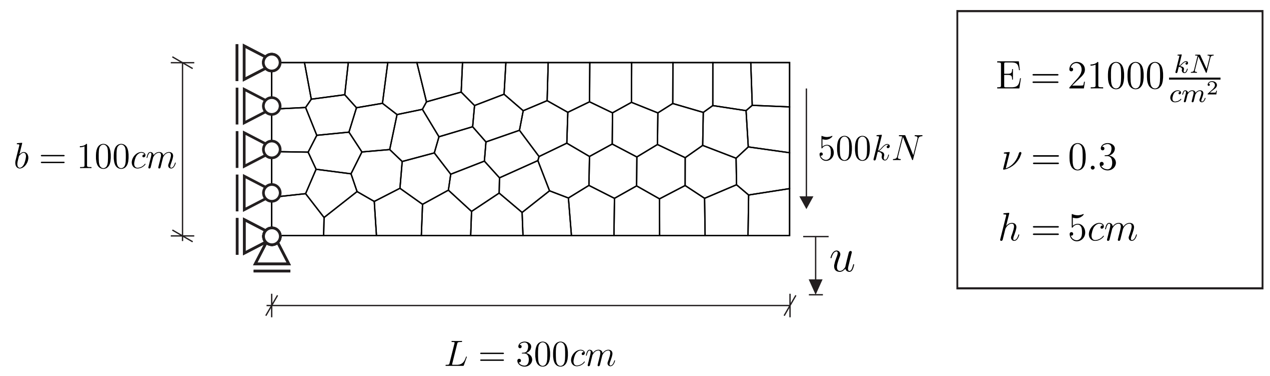
Der erste Term gewährleistet die Konsistenz der Lösung während der zweite Term für die Stabilität sorgt, weshalb die Konvergenz der Lösung sichergestellt ist. Bei Elementen mit mehr als drei Knoten ist der Stabilitätsterm notwendig, da die Elementsteifigkeitsmatrix sonst singulär ist.

3. Diskretisierungsgrundlagen

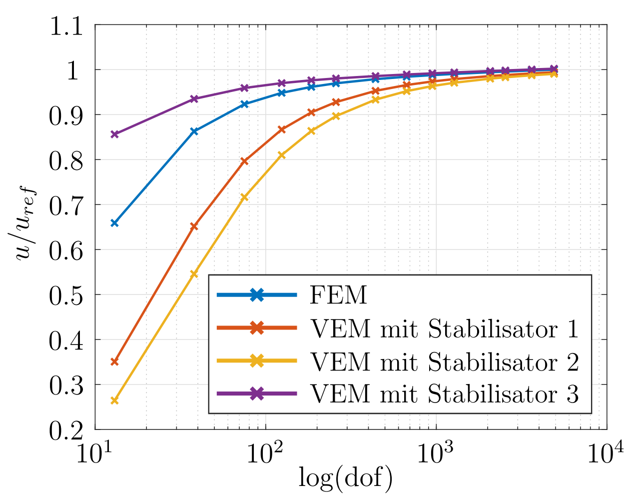


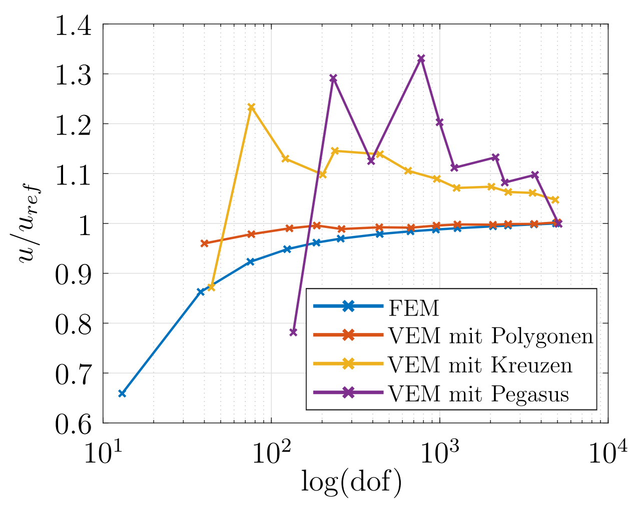
Aufgrund der vielseitigen Elementgeometrien, welche bei der VEM verwendet werden können, wurden auch in dieser Arbeit sehr unterschiedliche Netze als Diskretisierungsgrundlage eingesetzt. Dies reichte von klassischen Rechtecknetzen zu Schriftzügen, Polygonen bis zu der sogenannten Parkettierung, bei der das Verschieben einer Elementgeometrie ein Netz entstehen lässt.

4. Numerisches Beispiel



Ziel der Untersuchung eines Kragarms ist es, das Konvergenzverhalten der VEM zu bestätigen und zusätzlich den Einfluss bestimmter Parameter zu analysieren. Außerdem ist auch von Interesse, wie schnell die VEM gegen die korrekte Lösung konvergiert, besonders im Vergleich zur FEM (4-Knoten-Element). In den folgenden Graphen ist rechts der Einfluss der Netzwahl zu sehen, sowie links der Einfluss der **S**-Matrix bei einem Rechtecknetz. Die **S**-Matrix ist eine Besonderheit der VEM, da sie bestimmte mathematische Bedingungen erfüllen muss und somit unterschiedliche Zusammensetzungen hat. Als Referenzwert u_{ref} wurde die Lösung der FEM bei 4900 Freiheitsgraden gewählt.





Es ist zu erkennen, dass die Wahl der **S**-Matrix und die Wahl des Netzes das Konvergenzverhalten beeinflussen. Bei der Tessellation (Kreuz, Pegasus) werden verwertbare Ergebnisse erst bei einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden erreicht.