Theorie und Finite-Elemente Formulierung eines elastokinetischen Kontinuums mit thermomechanischer Kopplung

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Diplomarbeit von Dieter Legner

Einleitung

Bei vielen themomechanischen Problemstellungen ist eine *entkoppelte Betrachtung* möglich in dem Sinne, dass entweder das thermische Feld oder das mechanische Feld separat und unbeeinflusst von dem jeweils dualen Feld berechnet werden kann.

Tatsächlich laufen Vorgänge jedoch naturgemäß unter wechselseitiger Beeinflussung von Wärmefeld und Verschiebungen ab. Damit verbunden ist das Auftreten des thermoelastischen Aufheizphänomens (*GOUGH-JOULE-Effekt*), der im Rahmen eines *beidseitig gekoppelten Konzeptes* erfasst wird.

Stofffreie Gleichungen

Für das materielle Gebiet $\mathcal{B}_0$ lässt sich das thermomechanische Problem durch gekoppelte stofffreie Feldgleichungen und die Formulierung von Rand- und Anfangsbedingungen beschreiben:

Impulserhaltung

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = +\mathrm{Div}\,\mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}$$

Energieerhaltung

$$\rho_0 \theta \dot{s} = -\mathrm{Div}\,\mathbf{Q} + \rho_0 r + \rho_0 \theta \gamma_i$$

Randbedingungen:

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{N} = \overline{q}_0 \quad \text{auf} \ \partial_{\mathbf{Q}}\mathcal{B}_0 \ ; \ \theta = \overline{\theta} \quad \text{auf} \ \partial_\theta \mathcal{B}_0$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{N} = \overline{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf} \ \partial_\sigma \mathcal{B}_0$$

Anfangsbedingung:

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{in} \ \mathcal{B}_0 \ .$$

Stoffgleichungen

Ausgehend von der spezifischen freien Energie $\rho_0\psi$ als thermodynamische Potentialfunktion lauten die Stoffgleichungen der linearen, isotropen Thermoelastizität:

- Spezifische freie *Helmholtz-Energie:*

$$\rho_0\psi = \frac{1}{2}K_0 I^2_{\mathbf{E}_e} - 2\mu_0 II_{dev\mathbf{E}} - \frac{1}{2}(3\alpha_0)^2 K_0(\theta-\theta_0)^2 - \frac{\rho_0 c \theta^2}{2\theta_0}$$

- *Greensche*-Verzerrung: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})$
- Temperatur-Verzerrung: $\mathbf{E}_\theta = \alpha_0(\theta-\theta_0)\mathbf{I}$
- Elastische-Verzerrung: $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\theta$
- 2.*Piola-Kirchhoff*-Spannungen: $\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}$
- Entropieänderung: $\rho_0\theta_0\dot{s} = -\rho_0\theta_0 \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\theta}$
- Konstitutive Gleichung für den Wärmefluss:

$$\mathbf{Q} = -\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{Grad}\,\theta \ (\textit{Fourier}\text{-Gesetz}) \ .$$

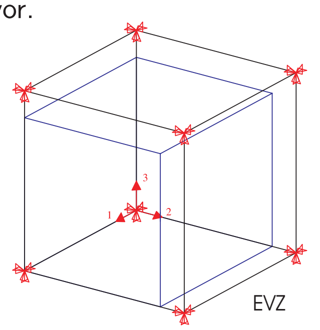
FE-Approximation

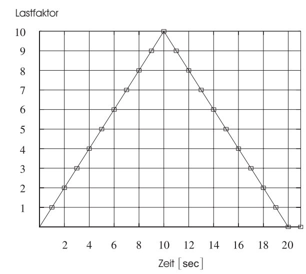
Aus der FE-Approximation erhält man nach Linearisierung ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^{\theta u}\mathbf{D} & {}^{\theta\theta}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{u}} \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{uu}\mathbf{K} & {}^{u\theta}\mathbf{K} \\ {}^{\theta u}\mathbf{K} & {}^{\theta\theta}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{u}\mathbf{P} \\ {}^{\theta}\mathbf{P} \end{bmatrix}$$

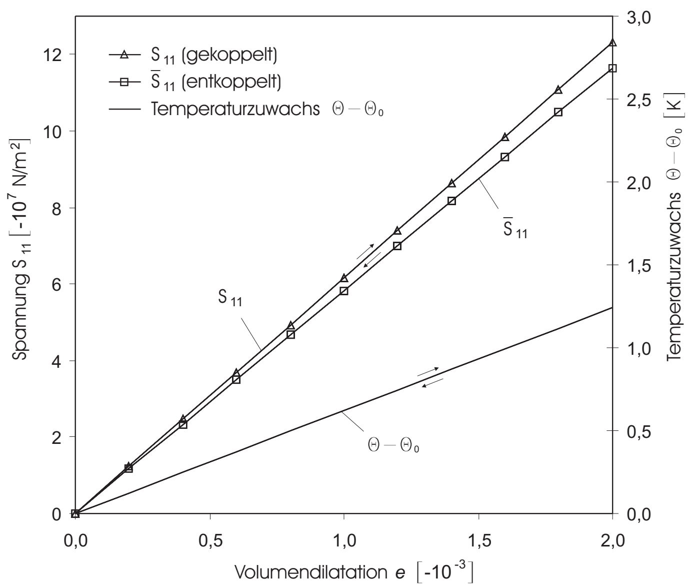
Thermoelastische Aufheizung durch mechanische Last

Die verschiebungsgesteuerte Kompression eines Aluminiumwürfels in 2- und 3-Richtung um 0.1% ruft aufgrund der Querdehnung Spannungen in 1-Richtung hervor.





Die damit verbundene Temperaturerhöhung (*GOUGH-JOULE-Effekt*) ist durch eine gekoppelte thermoelastische Berechnung ermittelbar.



Die Spannung S_{11} nach der gekoppelten Thermoelastizitätstheorie liegt aufgrund der zusätzlichen Zwangwirkung der mit der Aufheizung verbundenen thermischen Expansion über der entsprechenden Spannung $\overline{S}_{11}$ der entkoppelten Theorie.

Der Vorgang ist voll reversibel, bei Entlastung kühlt sich der Körper wieder auf die Referenztemperatur ab.