

**Zur Berechnung von Wölbfunktion und
Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte
mit der Methode der finiten Elemente**

F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer

Mitteilung 3(1997)

**Zur Berechnung von Wölbfunktion und
Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte
mit der Methode der finiten Elemente**

F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer

Mitteilung 3(1997)



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner Telefon: (0721) 608-2280
Institut für Baustatik Telefax: (0721) 608-6015
Universität Karlsruhe E-mail: bs@uni-karlsruhe.de
Postfach 6980 Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>
76128 Karlsruhe

Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente

F. Gruttmann, W. Wagner und R. Sauer

*Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstraße 12,
D-76131 Karlsruhe*

Zusammenfassung Bei allgemeiner Belastung von räumlichen Stäben ergeben sich Querschnittsverwölbungen aus Torsion. In üblichen Handrechnungen wird bei Beschränkung auf dünnwandige Querschnitte oft ein konstanter Verlauf in Dickenrichtung für die sogenannte Wölbfunktion angenommen. In dieser Arbeit wird deren näherungsweise Berechnung für beliebige Querschnitte mittels der Methode der finiten Elemente untersucht. Dabei können z.B. Ausrundungen und Flanschneigungen von Stahlbauprofilen problemlos berücksichtigt werden. Ein- oder mehrzellige Querschnitte sind berechenbar. Das Verfahren liefert außerdem die relevanten Torsionskennwerte.

On the computation of warping function and torsional quantities for arbitrary cross-sections using the finite element method

Abstract General loading of spatial beams leads to warping of the cross-section. For practical analysis often constant shape of the warping function in thickness direction is assumed for thin-walled cross-sections. In this paper the approximate computation using the finite element method is investigated. Circular parts as well as non-parallel flanges in steel design can be considered. Single and multi cell cross-sections are computable. Furthermore the procedure yields the relevant torsional properties.

1 Einleitung

Wir betrachten einen dreidimensionalen Stab mit Stabachse x und Querschnittsachsen y, z , die nicht Hauptachsen sind, bezüglich eines beliebigen Bezugspunktes. Die übliche Annahme für den Ortsvektor \mathbf{x} des verformten Stabes zu einem beliebigen Querschnittspunkt lautet

$$\mathbf{x}(x, y, z) = \mathbf{x}_0(x) + y \mathbf{a}_2(x) + z \mathbf{a}_3(x) + \alpha(x) w(y, z) \mathbf{a}_1(x). \quad (1)$$

Hier ist \mathbf{x}_0 der Ortsvektor zum Bezugspunkt (z.B. Schwerpunkt) und $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ ein orthogonales Basissystem, welches den Querschnitt des deformierten Stabes beschreibt. Der letzte Term ergibt die Querschnittsverwölbung in Richtung des Basisvektors \mathbf{a}_1 . Dabei ist α ein unabhängiger kinematischer Parameter und $w = w(y, z)$ die sogenannte Wölbfunktion. Üblicherweise wird innerhalb einer weiteren Annahme die unten definierte Hauptverwölbung, die aus der St.Venantschen Torsionstheorie resultiert, in Gl. (1) verwendet. Dies ist die Theorie der Torsion ohne Wölbbehinderung und damit ohne Wölbnormalspannungen.

Die numerische Berechnung des Torsionsproblems ist u.a. in den folgenden Arbeiten behandelt worden. Herrmann [1] verwendet das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie zur näherungsweise Berechnung von Torsionssteifigkeiten und Schubspannungen. Anisotropes Materialverhalten wird von Krahula et al. [2] sowie Haberl et al. [3] einbezogen. In [1] – [3] werden überwiegend finite Dreieckselemente verwendet. Zeller [4] entwickelt Variationsformulierungen für das gekoppelte Biegetorsionsproblem. Im Rahmen einer gemischten Finite-Element-Methode werden Ansätze für Verschiebungen und Spannungen gemacht.

Bei linear-elastischem Werkstoffverhalten können Querschnittsintegrale von w sowie Ableitungen von w in Produkten mit den Koordinaten y und z analytisch unter Anwendung der Green'schen Formel ermittelt werden, siehe z.B. [5]. Dies führt zu Ausdrücken, die für komplexe Querschnitte mit der nachfolgenden Finite-Element-Methode berechnet werden können.

Für elastoplastisches Werkstoffverhalten ist dagegen im allgemeinen eine numerische Querschnittsintegration zur Ermittlung von Schnittgrößen und Steifigkeiten erforderlich. Da Gl. (1) Grundlage für die Definition der Schnittgrößen bildet, ist die Kenntnis der Wölbfunktion, die allein von der Querschnittsform abhängt, erforderlich. Die hier berechnete Näherungslösung mit der Finite-Element-Methode liefert zunächst diskrete Werte an den Knotenpunkten. Eine Auswertung mit den Ansatzfunktionen ergibt den Verlauf über den Querschnitt. Anhand einiger Beispiele wird die Anwendbarkeit für praktische Aufgaben aufgezeigt.

2 St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe

In diesem Abschnitt werden aus Gründen einer zusammenhängenden Darstellung die wesentlichen Gleichungen der Torsion prismatischer Stäbe ohne Wölbbehinderung für beliebige Querschnitte dargestellt. Ausführliche Formulierungen finden sich in verschiedenen Lehrbüchern, z.B. [6] – [8]. Bei dünnwandigen Stahlbauprofilen wird oft angenommen, daß die Verwölbung konstant in Dickenrichtung der Einzelbleche ist. Hier sind u.a. die Arbeiten von Bornscheuer [9]– [11] mit Berechnungen der Torsionskenngrößen für Walzprofile zu nennen.

2.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

Bei dem hier betrachteten prismatischen Stab wird die Querschnittsfläche mit Ω und der Rand mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Die Randkoordinate s mit zugehörigem Tangentenvektor \mathbf{t} muß mit einem eindeutigen Umlaufsinn versehen sein. Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n} = [n_y, n_z]^T$ zeigt nach außen, siehe Bild 1.

Der Stab wird einem Torsionsmoment M_T mit konstanter Verdrillung α unterworfen. Der Verdrehwinkel $\chi = \alpha x$ wird als klein vorausgesetzt. Es kann für dickwandige Profile gezeigt werden, daß nur Kreis- und Kreisringquerschnitte frei von Querschnittsverwölbungen bei Torsionsbeanspruchung sind, siehe z.B. Sokolnikoff [6]. Im allgemeinen treten Verschiebungen u_x in Stablängsrichtung auf. Im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie folgt dann bei reiner Torsionsbelastung aus der vollständig geometrisch nichtlinearen Kinematik Gl. (1) das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$

$$\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} w \\ -xz \\ xy \end{bmatrix} \quad (2)$$

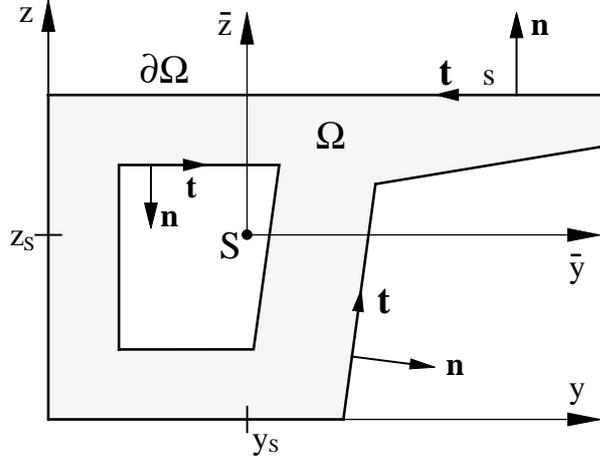


Bild 1: Querschnitt Ω mit nach außen gerichteter Normale – Fig. 1. Cross-section Ω with outward normal vector

mit der Wölbfunktion $w(y, z)$. Mit $\alpha = \text{konstant}$ wird angenommen, daß sich alle Querschnitte unabhängig von x verwölben. Die Gleitungen $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{xy}, \gamma_{xz}]^T$ ergeben sich durch partielle Ableitungen, die durch Kommas gekennzeichnet sind, zu

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} w_{,y} - z \\ w_{,z} + y \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Die übrigen Verzerrungen $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}$ sind identisch Null. Für den Vektor der Schubspannungen $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{xy}, \tau_{xz}]^T$ gilt das Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = G \boldsymbol{\gamma} \quad (4)$$

mit dem Schubmodul G . Die übrigen Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ und τ_{yz} verschwinden. Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen Gl. (3) werden in das Stoffgesetz Gl. (4) eingesetzt. Das Ergebnis wird in die Gleichgewichtsbeziehungen ohne Volumenkräfte $\sigma_{ik,i} = 0$

$$\tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} = 0 \quad (5)$$

eingesetzt und liefert die Laplacegleichung $\Delta w = w_{,yy} + w_{,zz} = 0$ in Ω .

Weiterhin müssen Randbedingungen erfüllt werden. Der prismatische Stab ist an den freien Rändern spannungsfrei. Damit müssen die Schubspannungen randparallel sein. Dies wird anschaulich bei den Beispielen in den Bildern 5 und 9 verdeutlicht. Für den Vektor der Schubspannungen muß somit gelten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{n} &= \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ &= G\alpha [(w_{,y} - z) n_y + (w_{,z} + y) n_z] = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Damit ist die starke Form des Randwertproblems definiert

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{in} \quad \Omega \\ n_y w_{,y} + n_z w_{,z} &= n_y z - n_z y && \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Es handelt sich hierbei um das zweite Randwertproblem der Potentialtheorie. Die Lösung des sogenannten Neumannschen Problems ist bis auf eine additive Konstante eindeutig, und besteht aus der Bestimmung einer harmonischen Funktion w , die die Randbedingung Gl. (7)₂ erfüllt, z.B. Kellog [12]. Geschlossene analytische Lösungen sind nur für einige einfache Querschnittsformen möglich. Dies sind Fälle, in denen die Randkurve in der Form $f(y, z) = 0$ vorliegt und außerdem $\Delta f = 0$ konstant ist, siehe z.B. [8].

2.2 Schwache Form des Randwertproblems

Die sogenannte schwache Form der Randwertaufgabe Gl. (7) erhält man durch Wichtung der Differentialgleichung mit Testfunktionen $v \in \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_w\}$, wobei $\partial\Omega_w$ der Teil des Randes ist, an dem w vorgegeben ist. Integration über das Gebiet Ω liefert

$$G(w, v) = - \int_{(\Omega)} [w_{,yy} + w_{,zz}] v \, d\Omega = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (8)$$

Partielle Integration und Einsetzen der Randbedingung Gl. (7)₂ ergibt

$$\begin{aligned} G(w, v) &= \int_{(\Omega)} [w_{,y} v_{,y} + w_{,z} v_{,z}] \, d\Omega - \oint_{(\partial\Omega)} [n_y w_{,y} + n_z w_{,z}] v \, ds \\ &= \int_{(\Omega)} [w_{,y} v_{,y} + w_{,z} v_{,z}] \, d\Omega - \oint_{(\partial\Omega)} [n_y z - n_z y] v \, ds = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Die schwache Form des Randwertproblems muß für *alle* zulässigen Funktionen $v \in \mathcal{V}$ erfüllt sein und ist damit gleichwertig zu Gl. (7). Da nur erste Ableitungen von w in Gl. (9) auftreten, können C^0 -stetige Elemente für die näherungsweise Lösung mit der Methode der finiten Elemente verwendet werden. Bei Kreisquerschnitten wird der Normalenvektor des Randes durch $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = [y, z]^T$ beschrieben. Da in diesem Fall der "Lastterm" $p = n_y z - n_z y$ verschwindet, wird hiermit die Wölbfreiheit für Kreis- und Kreisringquerschnitte gezeigt.

2.3 Hauptverwölbung und Torsionskennwerte

Im folgenden werden die Begriffe Grund-, Einheits- und Hauptverwölbung definiert. Die sogenannte *Grundverwölbung* w ist Lösung des Randwertproblems Gl. (7). Die *Einheitsverwölbung* \bar{w} ist durch

$$\bar{w} = w - \frac{1}{A} \int_{(\Omega)} w \, d\Omega, \quad \int_{(\Omega)} \bar{w} \, d\Omega = 0 \quad (10)$$

definiert, wobei A der Flächeninhalt des untersuchten Querschnittes ist. Im Randwertproblem Gl. (7) kann w durch \bar{w} ersetzt werden, da sich beide nur durch eine Konstante unterscheiden. Aus der Einheitsverwölbung können nun die Koordinaten y_D und z_D des Drillruhepunktes D ermittelt werden. Es kann gezeigt werden, daß diese Koordinaten mit denen des Schubmittelpunktes $M \{y_M, z_M\}$ übereinstimmen, siehe z.B. Trefftz [13], Reissner und Tsai [14]. Im Rahmen der Biegetorsionstheorie prismatischer Stäbe wird der Drillruhepunkt als Drehpunkt

bei freier Torsion ohne Zwangskräfte definiert. Aus $N = M_z = M_y = 0$ folgen somit die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_{(\Omega)} \tilde{w} \, d\Omega = 0, \quad \int_{(\Omega)} \tilde{w}y \, d\Omega = 0, \quad \int_{(\Omega)} \tilde{w}z \, d\Omega = 0. \quad (11)$$

In Gl. (11) ist \tilde{w} die sogenannte *Hauptverwölbung*, die durch die Transformation

$$\tilde{w} = \bar{w} + y_M \bar{z} - z_M \bar{y} \quad (12)$$

definiert ist. Da $\bar{y} = y - y_S$ und $\bar{z} = z - z_S$ Schwerpunktskoordinaten sind, ist Gl. (11)₁ mit Gl. (10) identisch erfüllt. Die noch unbekanntenen Koordinaten y_M und z_M ergeben sich aus den restlichen Bedingungen Gl. (11)₂ und Gl. (11)₃

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} \tilde{w}y \, d\Omega &= \int_{(\Omega)} \tilde{w}\bar{y} \, d\Omega = \int_{(\Omega)} (\bar{w}\bar{y} + y_M \bar{y}\bar{z} - z_M \bar{y}^2) \, d\Omega = 0, \\ \int_{(\Omega)} \tilde{w}z \, d\Omega &= \int_{(\Omega)} \tilde{w}\bar{z} \, d\Omega = \int_{(\Omega)} (\bar{w}\bar{z} + z_M \bar{z}^2 - z_M \bar{y}\bar{z}) \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt mit der abkürzenden Schreibweise $A_{ab} = \int_{(\Omega)} ab \, d\Omega$

$$y_M = -\frac{A_{\bar{w}\bar{z}} A_{\bar{y}\bar{y}} - A_{\bar{w}\bar{y}} A_{\bar{y}\bar{z}}}{A_{\bar{y}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{y}\bar{z}}^2}, \quad z_M = \frac{A_{\bar{w}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{w}\bar{z}} A_{\bar{y}\bar{z}}}{A_{\bar{y}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{y}\bar{z}}^2}. \quad (14)$$

Die Koordinaten von M können auch aus der Bedingung hergeleitet werden, daß der Wölbwiderstand bezogen auf einen beliebigen Punkt für den Schubmittelpunkt minimal wird, siehe z.B. Petersen [8].

Der auf M bezogene Wölbwiderstand C_M lautet somit

$$C_M = \int_{(\Omega)} \tilde{w}^2 \, d\Omega. \quad (15)$$

Definiert man das Koordinatensystem durch den Schubmittelpunkt mit $\tilde{y} = y - y_M$ und $\tilde{z} = z - z_M$ und setzt die Ableitungen von w unter Berücksichtigung von Gl. (12)

$$w_{,y} = \bar{w}_{,y} = \tilde{w}_{,y} + z_M, \quad w_{,z} = \bar{w}_{,z} = \tilde{w}_{,z} - y_M \quad (16)$$

in Gl. (3) und Gl. (4) ein, können die Schubspannungen mit den Ableitungen der Hauptverwölbung ausgedrückt werden

$$\boldsymbol{\tau} = G\alpha \begin{bmatrix} \tilde{w}_{,y} - \tilde{z} \\ \tilde{w}_{,z} + \tilde{y} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Das Torsionsmoment M_T ist durch Integration der Schubspannungen über den Querschnitt definiert $M_T = \int_{(\Omega)} (\tau_{xz}\tilde{y} - \tau_{xy}\tilde{z}) \, d\Omega$. Das Flächenmoment 2. Grades für Torsion I_T kann somit aus der konstitutiven Gleichung $M_T = GI_T\alpha$ hergeleitet werden und liefert mit Gl. (17)

$$I_T = \int_{(\Omega)} (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 + \tilde{w}_{,z}\tilde{y} - \tilde{w}_{,y}\tilde{z}) \, d\Omega. \quad (18)$$

Alternative Darstellungen mit der Grund- und Einheitsverwölbung sind möglich. I_T ist selbstverständlich nicht von $\{y_M, z_M\}$ abhängig.

Das Flächenmoment für Torsion kann auch durch Integration der Spannungsfunktion $\Phi(y, z)$ nach Prandtl berechnet werden, also $I_T = 2 \int_{(\Omega)} \Phi \, d\Omega$, z.B. [6]. Die Spannungsfunktion ist durch $\boldsymbol{\tau} = [\Phi_{,z}, -\Phi_{,y}]^T$ so definiert, daß das Gleichgewicht Gl. (5) identisch erfüllt ist. Durch Einsetzen der Spannungen in das Stoffgesetz und Berücksichtigung der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen erhält man die Poissonsche Differentialgleichung $\Delta\Phi = -2G\alpha$ in Ω . Als Randbedingung ergibt sich $\Phi_0 = \text{konstant}$ auf $\partial\Omega$. Die Schubspannungen werden durch eine Konstante nicht beeinflusst, daher kann $\Phi_0 = 0$ gewählt werden. Bei Querschnitten mit Löchern ist Φ_0 entlang der inneren Lochränder auch konstant, aber gegenüber dem Außenrand von Null verschieden. Die zugehörige schwache Form des Randwertproblems kann analog zu Abschnitt 2.2 hergeleitet werden.

3 Finite-Element-Formulierung

3.1 Steifigkeitsmatrix und rechte Seite

Die schwache Form des Randwertproblems Gl. (9) kann näherungsweise im Rahmen der Methode der finiten Elemente gelöst werden. Dazu werden für die Koordinaten $\mathbf{x} = [y, z]^T$, die Wölbfunktion w^h und die Testfunktionen v^h die gleichen Ansätze gewählt

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I, \quad w^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) w_I, \quad v^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) v_I. \quad (19)$$

Der Index h kennzeichnet somit die Näherungslösung der Methode der finiten Elemente. Dabei bezeichnet $nel = 4, 9, 16, \dots$ die Anzahl der Knoten pro Element. Die Ansätze $N_I(\xi, \eta)$ sind Lagrange-Funktionen für isoparametrische Elemente. Die Ableitungen der Ansätze nach den Koordinaten y und z werden auf übliche Weise unter Beachtung der Kettenregel gewonnen. Durch Einsetzen von Gl. (19) in Gl. (9) folgt

$$G(w^h, v^h) = \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} v_I (K_{IK}^e w_K - P_I^e) = 0. \quad (20)$$

Der Operator \bigcup beschreibt den Zusammenbau mit $numel$ als Gesamtanzahl der finiten Elemente zur Berechnung des Problems. Der Beitrag der Steifigkeitsmatrix K_{IK}^e zu den Knoten I und K sowie der rechten Seite P_I^e ergibt

$$K_{IK}^e = \int_{(\Omega_e)} (N_{I,y} N_{K,y} + N_{I,z} N_{K,z}) \, d\Omega_e, \quad P_I^e = \int_{(\partial\Omega)} (n_y z - n_z y) N_I \, ds. \quad (21)$$

Bei der Berechnung der rechten Seite ist darauf zu achten, daß ein eindeutiger Umfahrungssinn für die Randkoordinate s vorliegt. Da der Normalenvektor nach außen zeigt, ist bei Hohlquerschnitten der Umfahrungssinn am Innenrand entgegengesetzt zum Außenrand gerichtet. Gl. (21)₂ hängt somit nur von der Querschnittsgeometrie ab und liefert nur Beiträge für die Randknoten. Die Kettenregel ergibt das Differential der Bogenlänge $ds = |\mathbf{x}| d\xi$ mit der Randkoordinate $-1 \leq \xi \leq +1$. Die Ableitung nach der Bogenlänge ergibt somit $N_{I,s} = N_{I,\xi} / |\mathbf{x}|$ und

liefert den Einheitstangentenvektor $\mathbf{t} = [t_y, t_z]^T = \sum_{I=1}^{nel} N_{I,s} \mathbf{x}_I$. Aus der Bedingung $\mathbf{n}^T \mathbf{t} = 0$ werden die Komponenten des Normalenvektors bestimmt $\mathbf{n} = [-t_z, t_y]^T$.

Nach dem Zusammenbau der Elementanteile zu dem linearen Gleichungssystem Gl. (20) muß die Randbedingung $w_I = 0$ für einen beliebigen Knotenpunkt I berücksichtigt werden. Vorhandene Symmetrien können bei der Diskretisierung eingehen. Bei Symmetrie zur z -Achse müssen die Werte y_M, y_S, A_w und $A_{\bar{w}\bar{y}}$ a-priori zu Null gesetzt werden. Da die Randbedingung $w(y = 0, z) = 0$ eingehalten werden muß, gilt $\bar{w} = w$. Entsprechend wird bei Symmetrie zur y -Achse und bei doppelter Symmetrie vorgegangen. Es werden zunächst selbstverständlich nur die Werte der Teilquerschnitte berechnet.

3.2 Adaptive Netzverfeinerung

Im folgenden wird kurz auf die adaptive Netzverfeinerung im Rahmen der h -Methode für isoparametrische 4-Knoten-Elemente eingegangen. Eine übersichtliche Darstellung adaptiver Finite-Element-Diskretisierungen von Flächentragwerken kann Stein et al. [15] entnommen werden.

Es wird zunächst ein Startnetz unter Berücksichtigung von a-priori-Kriterien generiert. Dabei gehen Abweichungen der Elementgeometrie vom Quadrat und der approximierten Geometrie von der exakten Geometrie der Ränder ein. Der Verfeinerungsindikator von Zienkiewicz und Zhu [16] wird beim vorliegenden Problem als Kriterium für die weitere Netzunterteilung verwendet. Wie in [15] dargestellt ist, handelt es sich hierbei nicht um einen Fehlerschätzer mit Schrankeneigenschaften. Der Indikator ist jedoch aufgrund der Rechenerfahrung effizient für die Steuerung der Netzverfeinerung. Es wird angenommen, daß der Fehler der Schubspannungen $\mathbf{e}_\tau = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^h$ bzgl. der exakten Lösung $\boldsymbol{\tau}$ näherungsweise durch $\tilde{\mathbf{e}}_\tau = \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}^h$ beschrieben werden kann. Dabei sind $\boldsymbol{\tau}^h$ die Schubspannungen, die durch Ableitung der Wölbfunktion nach Gl. (17) mit $G\alpha = 1$ berechnet werden. Die gemittelten an den Elementrändern C_0 -kontinuierlichen Schubspannungen $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{N}_e \hat{\boldsymbol{\tau}}$ in Ω_e ergeben sich über die bilinearen Ansatzfunktionen \mathbf{N}_e aus den Knotenwerten $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. Diese folgen aus der Minimalbedingung

$$\bigcup_{e=1}^{numel} \int_{(\Omega_e)} (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}^h)^T (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}^h) d\Omega_e \longrightarrow \min. \quad (22)$$

Der ganze Vorgang ist eine L_2 -Glättung, wie bei Zienkiewicz und Zhu, ohne daß das Gleichgewicht im Gebiet und auf dem Rand verbessert wird.

Die Stationaritätsbedingung

$$\bigcup_{e=1}^{numel} \left[\int_{(\Omega_e)} \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e d\Omega_e \hat{\boldsymbol{\tau}} - \int_{(\Omega_e)} \mathbf{N}_e^T \boldsymbol{\tau}^h d\Omega_e \right] = 0 \quad (23)$$

stellt ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Knotenspannungen $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ dar. Der lokale Fehleranteil eines Elements $\eta_e = e_{\Omega_e}/e_\Omega$ mit dem Fehler des betrachteten Elements $e_{\Omega_e}^2 = \int_{(\Omega_e)} (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}^h)^T (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}^h) d\Omega_e$ und dem gemittelten Fehler über das gesamte Gebiet e_Ω dient als Dichtefunktion zur Steuerung der Verfeinerung des Finite-Element-Netzes. Üblich ist eine Verfeinerung bei $\eta_e > 0.03 - 0.05$. Bei der hier verwendeten hierarchischen Verfeinerung wird jedes der zu verfeinernden Elemente in vier Unterelemente aufgeteilt. Um irreguläre Knoten an den

Rändern der verfeinerten Gebiete zu vermeiden, erfolgt in Übergangsbereichen eine Unterteilung in drei Elemente. Dieser Prozeß wird bei hinreichend glatter Lösung so oft wiederholt, bis die vorgegebene Fehlertoleranz unterschritten ist.

4 Beispiele

Die vorgestellte Formulierung ist in eine erweiterte Version des Programms FEAP implementiert. Eine Dokumentation der Basisversion findet sich im Buch von Zienkiewicz und Taylor [17]. Die Lösung des linearen Gleichungssystems Gl. (20) ergibt die Grundverwölbung w . Die Koordinaten des Schubmittelpunktes $\{y_M, z_M\}$ folgen mit der Einheitsverwölbung Gl. (10) aus Gl. (14). Damit kann die Hauptverwölbung gemäß Gl. (12) und der Wölbwiderstand gemäß Gl. (15) unter Berücksichtigung der Ansätze Gl. (19) bestimmt werden. Das Torsionsflächenmoment I_T wird auf zwei Arten berechnet. I_{T1} erfolgt durch Integration der Wölbfunktion nach Gl. (18), wogegen I_{T2} mit der Prandtlschen Spannungsfunktion berechnet ist. Bedingt durch die unterschiedlichen Randbedingungen stimmt die Anzahl der Unbekannten N zur Berechnung von I_{T1} nur näherungsweise mit der für I_{T2} überein. Die übrigen Querschnittswerte für Biegung (Flächenmomente sowie Koordinaten des Schwerpunktes) werden ebenfalls ermittelt.

4.1 Walzprofil U 300 nach DIN 1026

Als erstes Beispiel werden die Querschnittswerte für ein Walzprofil U-300 berechnet. Die Abmessungen können der DIN 1026 (10.63) entnommen werden. Die vorhandene Geometrie mit Flanschneigungen und Ausrundungen wird bei der Diskretisierung des Querschnitts exakt berücksichtigt. Tabelle 1 enthält die berechneten Querschnittswerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Unbekannten N bei gleichmäßiger Netzverfeinerung. Man erkennt, daß I_{T1} und I_{T2} gegen den gleichen Wert konvergieren. Die Werte der DIN entsprechen den Ergebnissen von Bornscheuer [11]. Sie sind ebenfalls in Tabelle 1 angegeben. In [11] wurde I_T näherungsweise durch Summation der Einzelwerte dünnwandiger Rechteckquerschnitte ermittelt. Dabei wurden die Flanschneigungen und Ausrundungen näherungsweise berücksichtigt. Die Berechnung der Wölbkenngrößen basierte auf der Hauptverwölbung der Profilmittellinie. Damit erklären sich die Unterschiede zur hier durchgeführten Finite-Element-Rechnung. In Bild 2 ist die Hauptverwölbung in einem Plot dargestellt. Man erkennt, daß die Annahme eines konstanten Verlaufs in Dickenrichtung eine Näherung darstellt.

Tabelle 1: Biege- und Torsionskennwerte des U300 bei gleichmäßiger Netzverfeinerung – Table 1. Bending and torsional quantities of cross-section U300 for uniform mesh refinement

N	A cm^2	$I_{\bar{y}}$ cm^4	$I_{\bar{z}}$ cm^4	I_{T1} cm^4	I_{T2} cm^4	C_M cm^6	y_S cm	\bar{y}_M cm
72	58,75	8022,4	488,6	39,15	31,40	67617	2,687	-5,298
244	58,75	8024,9	492,1	38,29	36,34	68140	2,698	-5,326
888	58,75	8025,6	493,0	38,06	37,57	68275	2,700	-5,332
3376	58,75	8025,7	493,3	38,00	37,87	68309	2,701	-5,334
13152	58,75	8025,8	493,3	37,98	37,95	68318	2,701	-5,334
51904	58,75	8025,8	493,3	37,98	37,97	68320	2,701	-5,334
DIN 1026	58,8	8030	495	37,40	37,40	69100	2,70	-5,41

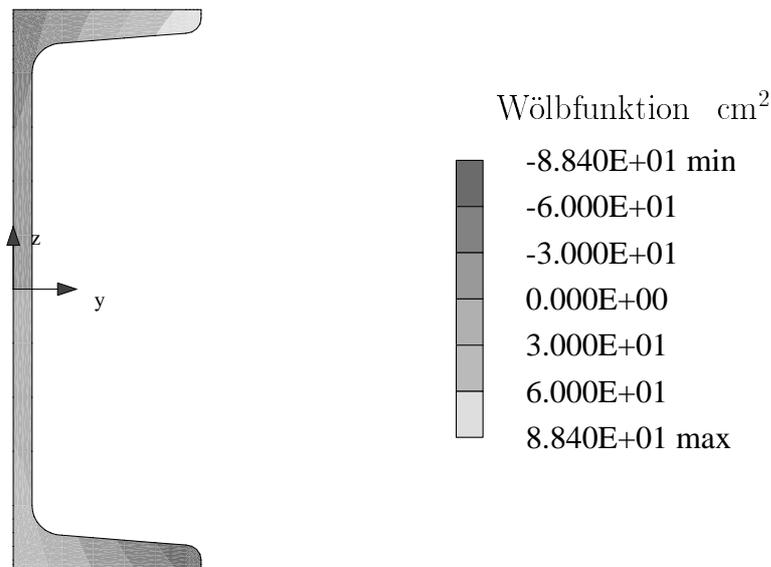


Bild 2: Plot der Hauptverwölbung für U300 – Fig. 2. Plot of the warping function of U300

4.2 Kranschiene A 100 nach DIN 536

Als zweites Beispiel wird der Querschnitt einer Kranschiene A100 nach DIN 536 (9.91) untersucht. Die Berechnung erfolgt aus Symmetriegründen am halben System. Der Querschnitt mit einer adaptiven Verfeinerung ist in Bild 3 dargestellt. Die Ergebnisse der Berechnung sind für adaptive Vernetzung in Tabelle 2 sowie für gleichmäßige Vernetzung in Tabelle 3 angegeben. Es ergeben sich geringfügige Unterschiede zu den Werten der DIN. Die hier berechneten Werte für A und z_S sind durch eine eigene Handrechnung bestätigt. Die Plots der Hauptverwölbung und der resultierenden Schubspannungen sind in den Bildern 4 und 5 dargestellt.

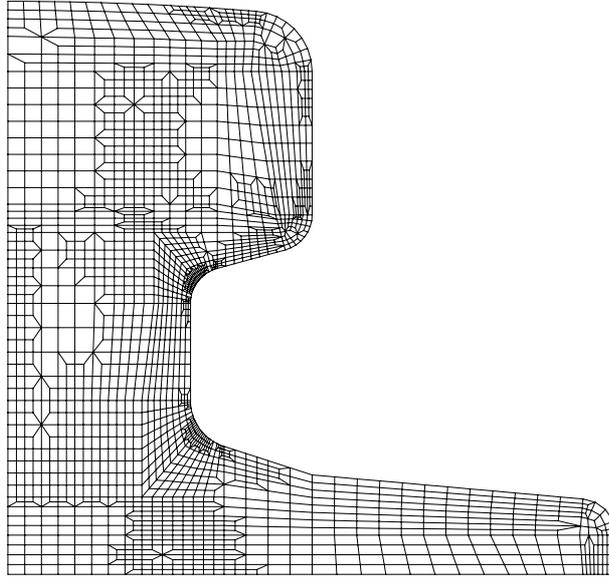


Bild 3: Diskretisierung einer Kranschiene A100 – Fig. 3. Discretization of a crane rail A100

Tabelle 2: Biege- und Torsionskennwerte der Kranschiene A100 bei adaptiver Netzverfeinerung – Table 2. Bending and torsional quantities of crane rail A100 for adaptive mesh refinement

N	A cm^2	$I_{\bar{y}}$ cm^4	$I_{\bar{z}}$ cm^4	I_{T1} cm^4	I_{T2} cm^4	C_M cm^6	z_S cm	z_M cm
90	94,92	866,0	1336	683,3	638,4	3838	4,240	3,262
304	95,03	868,8	1341	674,0	662,4	3954	4,246	3,254
1035	95,05	869,4	1342	671,5	668,6	3981	4,247	3,254
3056	95,05	869,5	1342	670,9	670,0	3989	4,247	3,253
5550	95,05	869,6	1342	670,7	670,4	3990	4,247	3,252
7635	95,06	869,7	1343	670,7	670,4	3992	4,247	3,252
8998	95,06	869,7	1343	670,7	670,5	3993	4,247	3,252
DIN 536	94,7	856	1345	666	666		4,21	3,23

Tabelle 3: Biege- und Torsionskennwerte der Kranschiene A100 bei gleichmäßiger Netzverfeinerung – Table 3. Bending and torsional quantities of crane rail A100 for uniform mesh refinement

N	A cm^2	$I_{\bar{y}}$ cm^4	$I_{\bar{z}}$ cm^4	I_{T1} cm^4	I_{T2} cm^4	C_M cm^6	z_S cm	z_M cm
90	94,92	866,0	1336	683,3	638,4	3838	4,240	3,262
304	95,03	868,8	1341	674,0	662,4	3954	4,246	3,254
1106	95,06	869,5	1343	671,5	668,6	3984	4,247	3,252
4270	95,07	869,7	1343	670,9	670,1	3992	4,247	3,252
16838	95,07	869,7	1343	670,7	670,5	3993	4,247	3,252
66934	95,07	869,8	1343	670,7	670,6	3994	4,247	3,252

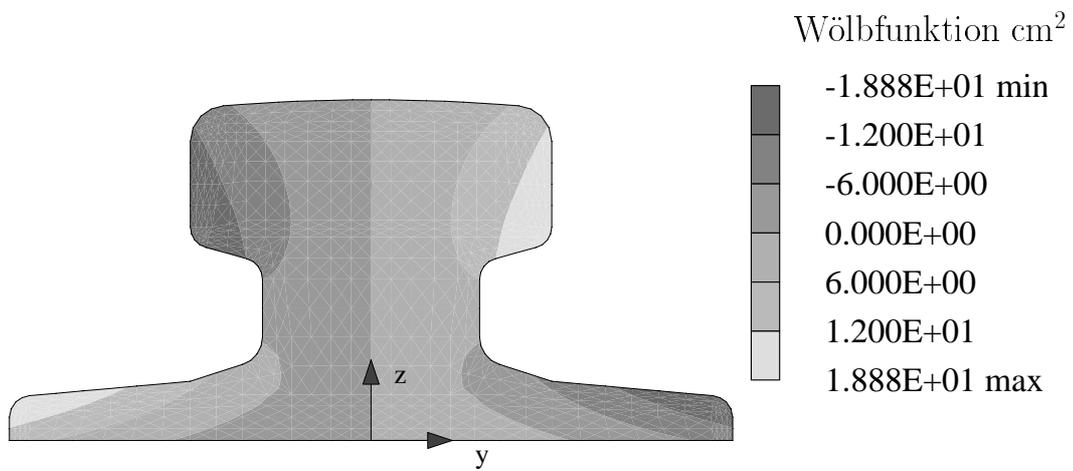


Bild 4: Plot der Hauptverwölbung der Kranschiene A100 – Fig. 4. Plot of the warping function of crane rail A100

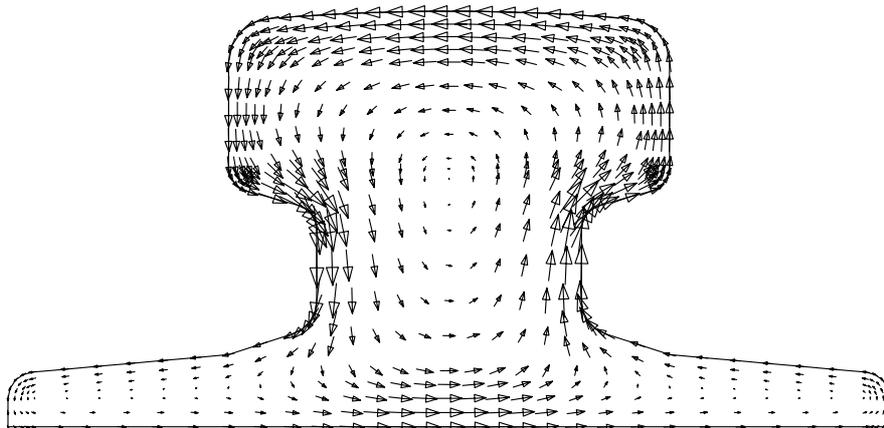


Bild 5: Plot der Schubspannungen der Kranschiene A100 – Fig. 5. Plot of the shear stresses of crane rail A100

4.3 Hohlkastenquerschnitt

Als letztes Beispiel wird ein Brückenquerschnitt gemäß Bild 6 betrachtet, siehe auch [4]. Die Abmessungen sind in m angegeben. Die Diskretisierung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie, siehe Bild 7. Die berechneten Querschnittswerte sind in Tabelle 4 zusammengestellt und mit vorhandenen Ergebnissen in [4]] verglichen. Es ist zu bemerken, daß bei gleichförmiger Netzverfeinerung Konvergenz der Torsionskennwerte erst bei etwa 50000 Freiheitsgraden gegeben ist. Damit wird die Effektivität der adaptiven Verfeinerung im Vergleich zur gleichförmigen Verfeinerung bestätigt. Die Plots der Hauptverwölbung und der Schubspannungen sind in den Bildern 8 und 9 dargestellt. Man erkennt deutlich, daß die Kragarme des Querschnitts für die Aufnahme des Torsionsmoments praktisch keine Rolle spielen. Eine überschlägliche Berechnung für den geschlossenen Querschnittsteil unter Vernachlässigung der kurzen Vouten liefert nach der zweiten Bredt'schen Formel $I_T = (2A_t)^2 / \oint h^{-1}(s) ds = 40,0 m^4$.

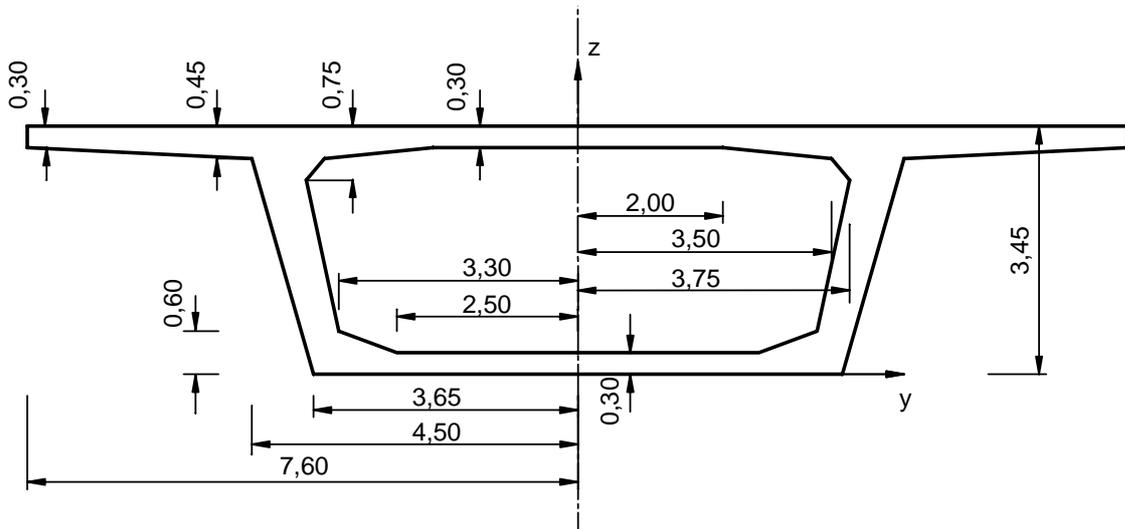


Bild 6: Hohlkastenquerschnitt – Fig. 6. Closed cross-section

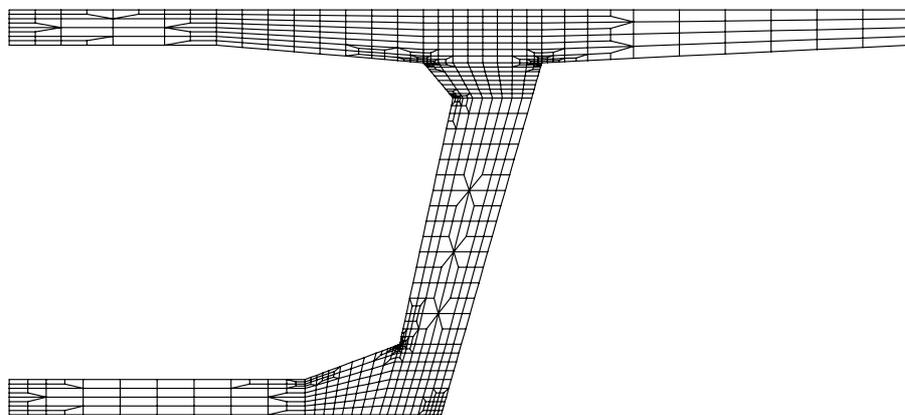


Bild 7: Adaptiv diskretisierter Querschnitt – Fig. 7. Adaptive discretized cross-section

Tabelle 4: Biege- und Torsionskennwerte des Kastenquerschnitts bei adaptiver Netzverfeinerung – Table 4. Bending and torsional quantities of the closed cross-section for adaptive mesh refinement

N	A m^2	$I_{\bar{y}}$ m^4	$I_{\bar{z}}$ m^4	I_{T1} m^4	C_M m^6	z_S m	z_M m
22	11,28	19,07	169,89	43,305	65,309	2,155	1,559
69	11,28	19,07	169,89	42,755	63,545	2,155	1,565
203	11,28	19,07	169,89	42,563	63,035	2,155	1,568
485	11,28	19,07	169,89	42,511	62,838	2,155	1,569
764	11,28	19,07	169,89	42,493	62,809	2,155	1,569
904	11,28	19,07	169,89	42,489	62,792	2,155	1,569
934	11,28	19,07	169,89	42,487	62,788	2,155	1,569
Lit. [4]]						2,16	1,57

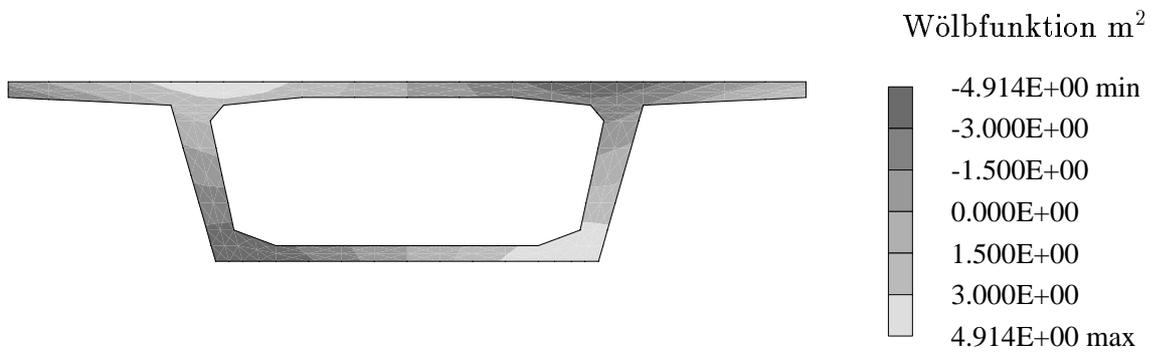


Bild 8: Plot der Hauptverwölbung für den Kastenquerschnitt – Fig. 8. Plot of the warping function for closed cross-section

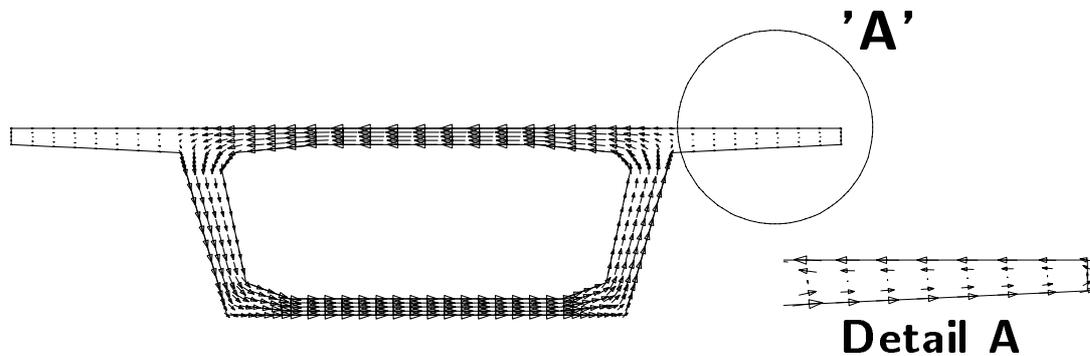


Bild 9: Plot der Schubspannungen für den Kastenquerschnitt – Fig. 9. Plot of the shear stresses for closed cross-section

5 Schlußfolgerungen

Für das St.Venantsche Torsionsproblem wird die schwache Form des Randwertproblems dargestellt. Unter Verwendung isoparametrischer Ansätze werden zugehörige Elementformulierungen beschrieben. Aus dem entwickelten Verfahren resultieren die Grund-, Einheits- und Hauptverwölbung, das Torsionsflächenmoment 2. Grades, die Koordinaten des Schubmittelpunktes sowie die Wölbkenngrößen für beliebige Querschnittsformen. Die berechneten Beispiele zeigen anschaulich die Effektivität der adaptiven Netzverfeinerung im Vergleich zu uniform verfeinerten Netzen.

Literatur

- [1] **Herrmann, L.R.:** Elastic torsional analysis of irregular shapes. J. of the Eng. Mech. Div. ASCE 91 (1965) 11–19 **1**
- [2] **Krahula, J.L.; Lauterbach, G.L.:** A finite element solution for Saint–Venant Torsion. AIAA Journal 7 (1969) Heft 12 2200–2203 **1**
- [3] **Haberl, G.; Och, F.:** Eine Finite–Element–Lösung für die Torsionssteifigkeit und den Schubmittelpunkt beliebiger Querschnitte. Z. f. Flugwiss. 22 (1974) Heft 4 115–119 **1**
- [4] **Zeller, C.:** Eine Finite–Element–Methode zur Berechnung der Verwölbungen und Profilverformungen von Stäben mit beliebiger Querschnittsform. Techn.–wiss. Mitt. 79–7, Inst. f. konstr. Ingenieurbau, Ruhr–Universität Bochum 1979 **1, 4.3, 4**
- [5] **Gruttmann, F.; Sauer, R.; Wagner, W.:** A Geometrical Nonlinear Eccentric 3D–Beam Element with Arbitrary Cross–Sections. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. im Druck, 1997 **1**
- [6] **Sokolnikoff, I.S.:** Mathematical Theory of Elasticity. New York McGraw–Hill 1956 **2, 2.1, 2.3**
- [7] **Kollbrunner, C.F.; Basler, K.:** Torsion. Berlin/Heidelberg/New York Springer–Verlag 1966
- [8] **Petersen, C.:** Stahlbau. Braunschweig/Wiesbaden Vieweg & Sohn 1988 **2, 2.1, 2.3**
- [9] **Bornscheuer, F.W.:** Systematische Darstellung des Biege– und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21(1) (1952) 1–9 **2**
- [10] **Bornscheuer, F.W.:** Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt. Der Stahlbau 21(12) (1952) 225–232 und Der Stahlbau 22(2) (1953) 32–44 – Druckfehlerberichtigung Stahlbau 30(3) (1961) 96
- [11] **Bornscheuer, F.W.:** Tafeln der Torsionskenngrößen für die Walzprofile der DIN 1025–1027. Der Stahlbau 30(3) (1961) 81–82 **2, 4.1**
- [12] **Kellog, O.D.:** Foundations of Potential Theory. New York Dover 1953 **2.1**
- [13] **Treffitz, E.:** Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. ZAMM 15 (1935) 220–225 **2.3**
- [14] **Reissner, E.; Tsai, W.T.:** On the Determination of the Centers of Twist and of Shear for Cylindrical Shell Beams. J. Appl. Mechanics 39 (1972) 1098–1102 **2.3**
- [15] **Stein, E.; Ohnimus, S.; Seifert, B.; Mahnken, R.:** Adaptive Finite–Element–Diskretisierung von Flächentragwerken. Bauingenieur 69 (1994) 53–62 **3.2**
- [16] **Zienkiewicz, O.C.; Zhu, J.Z.:** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Num. Meth. Engng. 24 (1987) 337–357 **3.2**
- [17] **Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.:** The Finite Element Method. Band 2, 4. Auflage London McGraw–Hill 1989

F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer,
Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH),
Kaiserstraße 12
78131 Karlsruhe

Privatdozent Dr.-Ing. habil. Friedrich Gruttmann ist Hochschuldozent, Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner ist Ordinarius und Dipl.-Ing. Roland Sauer ist wiss. Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.