

**Finite-Element-Berechnungen  
von räumlichen Stabtragwerken  
mit elasto-plastischem Materialverhalten**

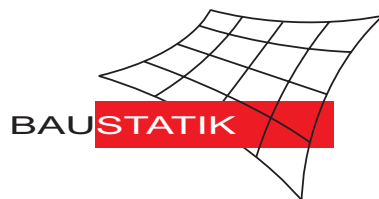
**F. Gruttmann, W. Wagner**

**Mitteilung 6(2002)**

**Finite-Element-Berechnungen  
von räumlichen Stabtragwerken  
mit elasto-plastischem Materialverhalten**

**F. Gruttmann, W. Wagner**

**Mitteilung 6(2002)**



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner    Telefon: (0721) 608-2280  
Institut für Baustatik    Telefax: (0721) 608-6015  
Universität Karlsruhe    E-mail: bs@uni-karlsruhe.de  
Postfach 6980    Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>  
76128 Karlsruhe

# Finite-Element-Berechnungen von räumlichen Stabtragwerken mit elasto-plastischem Materialverhalten

Friedrich Gruttmann und Werner Wagner

*Institut für Statik, Technische Universität Darmstadt,  
Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)*

**Zusammenfassung:** In dieser Arbeit werden räumliche Balken mit allgemeiner Querschnittsform betrachtet. Damit können im allgemeinen Fall Bezugspunkt, Schwerpunkt, Schubmittelpunkt und Lastangriffspunkt beliebige Punkte in der Querschnittsebene sein. Bei der Herleitung der Verzerrungen werden die Torsionsverwölbungen berücksichtigt. Elastoplastisches Materialverhalten wird in Form der von Mises Fließbedingung mit linearer isotroper Verfestigung und assoziierter Fließregel berücksichtigt. Damit sind Traglasten von allgemeinen räumlichen Stabtragwerken berechenbar. Die Finite-Element-Formulierung mit 7 Freiheitsgraden je Knoten wird unter Verwendung Lagrangescher Interpolationsfunktionen beschrieben. Das Element kann zur Diskretisierung exzentrischer Steifen von Flächentragwerken verwendet werden.

## 1 EINLEITUNG

Traglastberechnungen von Stabtragwerken basieren in der Regel auf Theorien für große inelastische Deformationen. In den meisten Fällen wird die Finite-Element-Methode zur näherungsweise Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet. Nachfolgend ist ein kurzer Überblick über Theorien für 3D-Balken und zugehörige Finite-Element-Formulierungen gegeben. Es sind nur einige repräsentative Arbeiten der verschiedenen Zugänge, insbesondere zur Darstellung endlicher Rotationen, angegeben.

Argyris et al. [1] führen sogenannte semitangentiale Rotationen zur Vermeidung der Nichtkommutativität endlicher Drehungen um feste Achsen ein. In der Arbeit von Reissner [2] werden Verzerrungsmaße für dreidimensionale Balken aus der virtuellen Arbeit hergeleitet. Geometrisch exakte Formulierungen und konsistente Approximationen sind von Guggenberger [3] beschrieben. Bathe und Bolourchi [4] entwickeln die sogenannte "updated" und "total Lagrange" Formulierung für nichtlineare Balken. Die Abspaltung von Starrkörperanteilen bei den Deformationen wird in den Arbeiten von Belytschko und Hsieh [5] oder Crisfeld [6] durchgeführt. Dabei können lineare Elemente für nichtlineare Berechnungen verwendet werden. Simo und Vu-Quoc [7, 8] schlagen ein Verfahren mit

einer multiplikativen Aufdatierung der Rotationen vor. In [8] wird zusätzlich die Torsionsverwölbung berücksichtigt. Bei der Elementformulierung von Cardona und Géradin [9] werden die Rotationsparameter innerhalb der Newtoniteration additiv neu berechnet. Die angegebenen Arbeiten beschränken sich auf Balken mit Rechteckquerschnitten und linear-elastisches Materialverhalten.

Nachfolgend sind die wesentlichen Merkmale der entwickelten Elementformulierung beschrieben:

Wir betrachten Balkensysteme mit beliebiger Querschnittsform. Die kinematische Annahme zur Herleitung der Balkenverzerrungen beinhaltet Verwölbungen aus Torsion. Die Stabverzerrungen werden aus dem Greenschen Verzerrungstensor berechnet. Das Materialmodell basiert auf der additiven Zerlegung der Verzerrungen in elastischen und inelastischen Anteil, Einführung der von Mises Fließbedingung mit linearer isotroper Verfestigung und einer assoziierten Fließregel. Die Integration der Spannungen über den Querschnitt wird numerisch durchgeführt. Für linearelastisches Materialverhalten kann die Integration der Steifigkeiten analytisch durchgeführt werden. Die daraus folgende Elastizitätsmatrix für die Schnittgrößen weist verschiedene Kopplungsterme auf. Das zugehörige finite Balkenelement hat an jedem Knoten 7 Freiheitsgrade. Die unabhängigen kinematischen Größen werden mit Lagrangeschen Interpolationsfunktionen approximiert. Die äußeren Lasten können an einem beliebigen Punkt des Querschnitts wirken. Bei einem Lastangriffspunkt außerhalb des Bezugspunktes ergeben sich Beiträge zur symmetrischen Elementsteifigkeitsmatrix. Das Balkenelement kann zur Diskretisierung exzentrischer Steifen von Schalenstrukturen verwendet werden.

## 2 KINEMATIK DES 3D-BALKENS

Es wird ein räumlicher Balken mit Bezugskonfiguration  $\mathcal{B}_0$  und Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$  zur Zeit  $t$  gemäß Abbildung 1 betrachtet. Der Querschnitt mit Bezugspunkt  $0$ , Schwerpunkt  $S$ , Schubmittelpunkt  $M$  und Lastangriffspunkt  $P$  kann beliebig geformt sein. Es werden lokale Koordinaten  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit zugehörigen Basisvektoren eingeführt. Dabei beschreibt  $S = \xi_1 \in [0, L]$  die Bogenlänge der Bezugskurve. Zur Zeit  $t = 0$  wird die Querschnittsebene durch  $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$  aufgespannt und  $\mathbf{A}_1$  definiert die Stabachse. Das entsprechende Basissystem der Momentankonfiguration ist durch  $\mathbf{a}_i$  definiert. Im folgenden beschreiben Kommas partielle Ableitungen bezüglich der Koordinaten  $\xi_i$ . Die Ableitung nach der Bogenlänge ist durch  $(\cdot)'$  gekennzeichnet.

Für die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t = 0$  und  $t$  werden folgende Annahmen getroffen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi_2, \xi_3, S) &= \mathbf{X}_0(S) + \xi_2 \mathbf{A}_2(S) + \xi_3 \mathbf{A}_3(S) \\ \mathbf{x}(\xi_2, \xi_3, S, t) &= \mathbf{x}_0(S, t) + \xi_2 \mathbf{a}_2(S, t) + \xi_3 \mathbf{a}_3(S, t) + \alpha(S, t) \bar{w}(\xi_2, \xi_3) \mathbf{a}_1(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Die Wölbfunktion  $\bar{w}(\xi_2, \xi_3)$  folgt als Lösung der Differentialgleichung der St.Venant'schen Torsionstheorie, siehe z.B. [10]. Weiterhin ist  $\alpha$  ein unabhängiger Parameter. Die Erweiterung der Timoshenko-Stabkinematik um die elastische Torsionsverwölbung stellt für große elastische Verzerrungen und bei inelastischem Materialverhalten eine Näherung dar. Das vorliegende Balkenmodell ist durch das Stoffgesetz auf kleine Verzerrungen be-

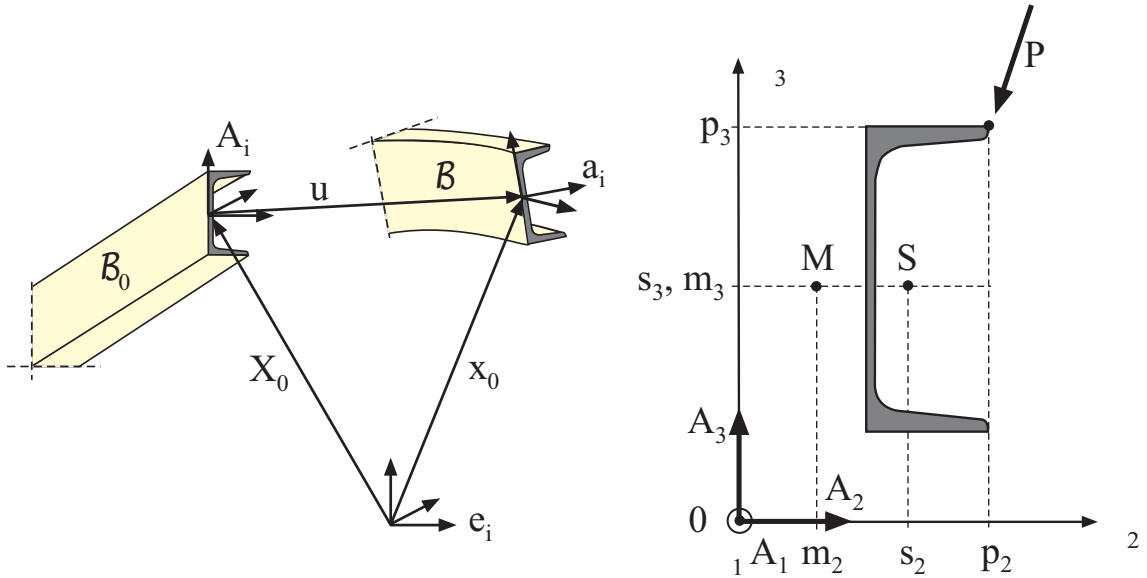


Abbildung 1: Konfigurationen eines 3D-Balkens

schränkt. Die durchgeführten Berechnungen zeigen, daß im Bereich kleiner Verzerrungen mit der kinematischen Annahme (1) gute Ergebnisse erzielt werden können.

Weiterhin werden die Basissysteme  $\mathbf{A}_i$  and  $\mathbf{a}_i$  durch orthogonale Transformationen bestimmt

$$\mathbf{A}_i(S) = \mathbf{R}_0(S) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a}_i(S, t) = \mathbf{R}(S, t) \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_0, \mathbf{R} \in SO(3). \quad (2)$$

Verschiedene Parametrisierungen für orthogonale Tensoren sind in der Literatur diskutiert worden, siehe z.B. Betsch et al. [11].

Mit (1) können die Tangentenvektoren  $\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i}$  und  $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}$  durch Ableitung bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{X}'_0 + \xi_2 \mathbf{A}'_2 + \xi_3 \mathbf{A}'_3 & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{x}'_0 + \xi_2 \mathbf{a}'_2 + \xi_3 \mathbf{a}'_3 + \alpha' \bar{w} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{A}_2 & \mathbf{g}_2 &= \mathbf{a}_2 + \alpha \bar{w}_{,2} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3 & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 + \alpha \bar{w}_{,3} \mathbf{a}_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Durch Rücktransformation der kovarianten Basisvektoren mit den Rotationstensoren  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{R} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{e}_i$  folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &:= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{d} & \mathbf{f}_1 &:= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d} + \alpha' \bar{w} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{F}_2 &:= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_2 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{f}_2 &:= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_2 + \alpha \bar{w}_{,2} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{F}_3 &:= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}_3 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{f}_3 &:= \mathbf{R}^T \mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3 + \alpha \bar{w}_{,3} \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (4)$$

mit  $\mathbf{d} = \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3$ . Somit ergeben sich die Verzerrungs- und Krümmungsvektoren des Stabes

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 := \mathbf{R}_0^T \mathbf{X}'_0 \quad \boldsymbol{\kappa}_0 := \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\theta}_0 \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{R}^T \mathbf{x}'_0 \quad \boldsymbol{\kappa} := \mathbf{R}^T \boldsymbol{\theta}, \quad (5)$$

wobei die axialen Vektoren  $\boldsymbol{\theta}_0$  und  $\boldsymbol{\theta}$  durch  $\mathbf{A}'_i = \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{A}_i$  und  $\mathbf{a}'_i = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_i$  definiert sind. Die Gleichungen (3) und (4) werden in den Greenschen Verzerrungstensor eingesetzt. Die

Komponenten, die zur virtuellen Arbeit beitragen, lauten

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(g_{11} - G_{11}) \\ g_{12} - G_{12} \\ g_{13} - G_{13} \end{bmatrix} \quad (6)$$

mit den Metrikkoeffizienten der Bezugs- und Momentankonfiguration

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j. \quad (7)$$

### 3 SCHWACHE FORM DER RANDWERTAUFGABE

Der Balken wird durch verteilte Lasten  $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}(S)$  belastet, siehe Abbildung 1. Dabei sind  $\{p_2, p_3\}$  die Koordinaten des Lastangriffspunktes. Der Ortsvektor des Lastangriffspunktes in der Momentankonfiguration lautet  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_p$  mit  $\mathbf{r}_p = p_2 \mathbf{a}_2 + p_3 \mathbf{a}_3 + \alpha \bar{w}_p \mathbf{a}_1$  und  $\bar{w}_p = \bar{w}(p_2, p_3)$ . Die unabhängigen kinematischen Größen des Balkens sind  $\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{R}, \alpha]^T$ . Hierin ist  $\mathbf{u} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_0$  der Verschiebungsvektor und  $\mathbf{R} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{e}_i$  der Rotationsensor der Bezugskurve.

Mit dem axialen Vektor  $\delta \mathbf{w}$ , der durch  $\delta \mathbf{a}_i = \delta \mathbf{w} \times \mathbf{a}_i$  definiert ist, kann das Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \int_S \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}} \, dS - \int_S \delta \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} \, dS = 0 \quad (8)$$

mit

$$\delta \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \alpha \\ \delta \alpha' \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{S}} = \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{S} \, dA \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \mathbf{r}_p \times \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{w}_p (\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}_1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $\mathbf{A}$  durch  $\delta \mathbf{E} = \mathbf{A} \delta \hat{\mathbf{E}}$  definiert

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\hat{\mathbf{F}}^T, \hat{\mathbf{F}}^T \mathbf{W}_d^T, \mathbf{a}, \bar{w} \hat{\mathbf{F}}^T \mathbf{e}_1] & \hat{\mathbf{F}} &= [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] \\ \mathbf{a} &= (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_1) (\bar{w}_{,2} \mathbf{e}_2 + \bar{w}_{,3} \mathbf{e}_3) & \mathbf{W}_d &= \text{skew } \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (10)$$

Da die Spannungen  $S^{22}, S^{33}, S^{23}$  im Rahmen der Stabtheorie vernachlässigt werden, wird nun  $\mathbf{S} = [S^{11}, S^{12}, S^{13}]^T$  definiert. Mit  $\mathbf{T} = [T^{11}, T^{12}, T^{13}]^T = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{S}$  und  $\tilde{T}^{1\alpha} = (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_1) S^{1\alpha}$  erhält man die Vektordarstellung der Schnittgrößen

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ M^1 \\ M^2 \\ M^3 \\ F^w \\ M^w \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{13} \\ T^{13} \xi_2 - T^{12} \xi_3 \\ T^{11} \xi_3 \\ -T^{11} \xi_2 \\ \tilde{T}^{12} \bar{w}_{,2} + \tilde{T}^{13} \bar{w}_{,3} \\ T^{11} \bar{w} \end{bmatrix} dA. \quad (11)$$

Dabei ist  $F^1$  die Normalkraft,  $F^2$  und  $F^3$  die Querkräfte,  $M^1$  das Torsionsmoment,  $M^2$  und  $M^3$  die Biegemomente,  $F^w$  das sekundäre Torsionsmoment und  $M^w$  das Bimoment.

Zur Berücksichtigung des elastoplastischen Materialverhaltens wird die additive Zerlegung des Greenschen Verzerrungstensors in einen elastischen und einen plastischen Anteil vorgenommen. Dies ist nur gültig im Bereich kleiner Verzerrungen. Die von Mises–Fließbedingung mit linearer isotroper Verfestigung und eine assoziierte Fließregel vervollständigen das Materialmodell. Die elastoplastischen Spannungen werden mit bekannten Operator–Split–Methoden berechnet. Im Prädiktor–Schritt werden sogenannte Versuchsspannungen berechnet. Durch iterative Erfüllung der Fließbedingung werden die Spannungen in den Integrationspunkten bestimmt.

Für die Finite–Element–Formulierung wird die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts hergeleitet

$$L[g(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v})] = g(\bar{\mathbf{v}}, \delta\bar{\mathbf{v}}) + \int_S (\delta\hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{D}} \Delta\hat{\mathbf{E}} + \Delta\delta\hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}}) dS - \int_S \Delta\delta\mathbf{x}_p^T \bar{\mathbf{p}} dS \quad (12)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\delta\mathbf{x}_p &= p_2\Delta\delta\mathbf{a}_2 + p_3\Delta\delta\mathbf{a}_3 + \alpha\bar{w}_p\Delta\delta\mathbf{a}_1 + \delta\alpha\bar{w}_p\Delta\mathbf{a}_1 + \Delta\alpha\bar{w}_p\delta\mathbf{a}_1 \\ \Delta\hat{\mathbf{E}} &= [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\boldsymbol{\kappa}, \Delta\alpha, \Delta\alpha']^T \quad \Delta\delta\hat{\mathbf{E}} = [\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\delta\boldsymbol{\kappa}, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Linearisierung der Schnittgrößen (9) liefert mit Anwendung der Produktregel

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{d\hat{\mathbf{S}}}{d\hat{\mathbf{E}}} = \frac{d}{d\hat{\mathbf{E}}} \left[ \int_A \mathbf{A}^T \mathbf{S} dA \right] = \int_A (\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{G}}) dA. \quad (14)$$

Der erste Teil folgt durch Differentiation des Spannungsvektors  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{C} := d\mathbf{S}/d\mathbf{E}$ . Im Fall elastoplastischen Materialverhaltens muß die konsistente Tangentenmatrix berücksichtigt werden. Der zweite Teil folgt durch Differentiation des Matrizenprodukts  $\mathbf{A}^T \mathbf{S}$ , wobei der Spannungsvektor  $\mathbf{S}$  festgehalten wird, siehe [12].

Die Einheitsverwölbung  $\bar{w}$  wird für beliebige Querschnittsformen in einem getrennten Rechenprozess bestimmt, siehe [10]. Die Querschnittsintegration in (9)<sub>2</sub> und (14) wird numerisch durchgeführt. Dabei wird das Finite–Element–Netz zur Berechnung von  $\bar{w}$  für die numerische Integration der Spannungen verwendet.

Im Fall kleiner Dehnungen wird die Matrix  $\hat{\mathbf{F}}$  gemäß (10) näherungsweise zur Einheitsmatrix. Weiterhin wird für den Rest dieses Abschnitts linearelastisches Materialverhalten angenommen. Damit kann  $\mathbf{C}$  mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Schubmodul  $G$  und die Matrix  $\mathbf{A}$  mit  $\hat{\mathbf{F}} \approx \mathbf{1}$  spezifiziert werden

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & -\xi_2 & 0 & \bar{w} \\ 0 & 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 0 & \bar{w}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_2 & 0 & 0 & \bar{w}_{,3} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Da  $\mathbf{A}$  in diesem Fall nicht von den Verschiebungen abhängt, gilt  $\mathbf{E} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{E}}$ . Somit kann  $\hat{\mathbf{D}}$  aus (14) mit (15) und  $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$  analytisch integriert werden. Mit den Definitionen

$$I_{\alpha\beta} = \int_A \xi_\alpha \xi_\beta dA, \quad I_{\bar{w}\alpha} = \int_A \bar{w} \xi_\alpha dA, \quad I_{\bar{w}\bar{w}} = \int_A \bar{w}^2 dA, \quad I_0 = I_{22} + I_{33} \quad (16)$$

und dem St.Venant'schen Torsionswiderstand  $I_T$  erhält man nach einiger Rechnung

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & EAs_3 & -EAs_2 & 0 & 0 \\ & GA & 0 & -GAs_3 & 0 & 0 & GAs_3 & 0 \\ & & GA & GAs_2 & 0 & 0 & -GAs_2 & 0 \\ & & & GI_0 & 0 & 0 & -G(I_0 - I_T) & 0 \\ & & & & EI_{33} & -EI_{23} & 0 & EI_{\bar{w}3} \\ & & & & & EI_{22} & 0 & -EI_{\bar{w}2} \\ & & \text{sym.} & & & & G(I_0 - I_T) & 0 \\ & & & & & & & EI_{\bar{w}\bar{w}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Die Elastizitätsmatrix  $\hat{\mathbf{D}}$  ist konstant und symmetrisch. Eine Formulierung mit 6 Schnittgrößen erhält man, wenn der Beitrag des Bimoments und des sekundären Torsionsmoments zur Verzerrungsenergie vernachlässigt werden kann, siehe [13]. Wenn der Bezugspunkt 0 und der Schubmittelpunkt  $M$  mit den Koordinaten  $\{m_2, m_3\}$  nicht übereinstimmen, gibt es eine Biegetorsionskopplung. Im Unterschied zu [8] ist hier der Bezugspunkt ein beliebiger Punkt des Querschnitts. Wenn die Querschnittsachsen Hauptachsen sind, verschwinden mit  $S = M = 0$  alle Terme außer  $-G(I_0 - I_T)$  außerhalb der Hauptdiagonalen. Bei weiterer Vernachlässigung von  $F^w$  und  $M^w$  folgt dann die bekannte Elastizitätsmatrix  $\hat{\mathbf{D}} = \text{diag}[EA, GA, GA, GI_T, EI_{33}, EI_{22}]$ . Sogenannte Schubkorrekturfaktoren berücksichtigen näherungsweise den Einfluss der Verwölbungen aus Querkräften und können in (17) bei den Schubsteifigkeiten hinzugefügt werden.

#### 4 FINITE-ELEMENT-FORMULIERUNG

Bei Anwendung des isoparametrischen Konzepts werden die Ortsvektoren der Ausgangskonfiguration und die unabhängigen kinematischen Variablen mittels Lagrangescher Interpolationspolynome  $N_I(\xi)$  approximiert

$$\mathbf{x}_0^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{x}_I, \quad \mathbf{x}_0^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) (\mathbf{x}_I + \mathbf{u}_I), \quad \alpha^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \alpha_I. \quad (18)$$

Dabei ist  $nel$  die Anzahl der Knoten am Element. Weiterhin wird das Basissystem der Bezugskonfiguration und der Momentankonfiguration mit den gleichen Ansatzfunktionen interpoliert

$$\mathbf{A}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{A}_{mI}, \quad \mathbf{a}_m^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi) \mathbf{a}_{mI}. \quad (19)$$

Damit wird die Orthogonalitätsbedingung der Basissysteme  $\mathbf{A}_m^h$  und  $\mathbf{a}_m^h$  nur an den Knoten erfüllt. Die Ausgangsbasis  $\mathbf{A}_{mI}$  wird bei der Eingabe der Finite-Element-Daten generiert. Das System der Momentankonfiguration wird mit der sogenannten Rodrigues-Formel berechnet

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{a}_{mI} \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{1} + \frac{\sin \omega_I}{\omega_I} \boldsymbol{\Omega}_I + \frac{1 - \cos \omega_I}{\omega_I^2} \boldsymbol{\Omega}_I^2. \quad (20)$$

Diese Darstellung ist singularitätenfrei für  $0 \leq \omega_I < 2\pi$  mit  $\omega_I = |\boldsymbol{\omega}_I|$ . Hier ist  $\boldsymbol{\omega}_I$  der zur schiefssymmetrischen Matrix  $\boldsymbol{\Omega}_I$  zugehörige axiale Vektor.



Die Finite-Element-Gleichungen (18) – (20) werden in (12) eingesetzt und man erhält

$$L[g(\mathbf{v}^h, \delta \mathbf{v}^h)] = \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T (\mathbf{f}_I^e + \mathbf{K}_{IK}^e \Delta \mathbf{v}_K). \quad (21)$$

Hier ist  $\bigcup$  der Zusammenbauoperator,  $numel$  die Gesamtanzahl der finiten Elemente und  $\Delta \mathbf{v}_K = [\Delta \mathbf{u}_K, \Delta \mathbf{w}_K, \Delta \alpha_K]^T$  der Zuwachs des Verschiebungsvektors. Die Summe der inneren und äußeren Knotenkräfte und die tangentielle Steifigkeitsmatrix ergeben sich dann zu

$$\mathbf{f}_I^e = \int_S (\mathbf{B}_I^T \hat{\mathbf{S}} - N_I \bar{\mathbf{q}}_I) dS, \quad \mathbf{K}_{IK}^e = \int_S (\mathbf{B}_I^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK} + \mathbf{P}_{IK}) dS. \quad (22)$$

mit  $dS = |\mathbf{X}_{0,\xi}^h| d\xi$ . Der Lastvektor  $\bar{\mathbf{q}}_I$ , die Matrizen  $\mathbf{B}_I$ ,  $\mathbf{G}_{IK}$  und  $\mathbf{P}_{IK}$  sind im Detail in [12] angegeben. Da die Matrix  $\hat{\mathbf{D}}$ , die geometrische Matrix und die Laststeifigkeitsmatrix symmetrisch sind, ist auch die tangentielle Steifigkeitsmatrix symmetrisch. Die Integration der Elementmatrizen bezüglich der Bogenlänge  $S$  erfolgt numerisch. Zur Vermeidung von Schubversteifungen werden alle Terme reduziert integriert. Die Verschiebungen  $\mathbf{u}_I$ , Rotationsparameter  $\omega_I$  und Parameter  $\alpha_I$  werden im Rahmen des Newtonverfahrens durch Addition der Zuwächse neu berechnet.

## 5 BEISPIELE

### 5.1 Kragarm mit U-Querschnitt

Das in Abbildung 2 dargestellte U-Profil wird durch eine Einzellast an der Kragarmspitze belastet. Damit erfährt der Träger eine Biege- und Torsionsbelastung. Es wird linear elastisches und ideal plastisches Materialverhalten angenommen. Die Fließspannung beträgt  $y_0 = 36 \text{ kN/cm}^2$ . Die Lösung aus dem Balkenmodell wird mit einer Schalendiskretisierung verglichen. Im ersten Fall werden 20 zwei-knotige Balkenelemente und im zweiten Fall 180 vier-knotige Schalenelemente verwendet. Im folgenden wird die vertikale Verschiebung  $w$  des Punktes 0 der Kragarmspitze berechnet. Im elastoplastischen Fall wird die Struktur bis zu einer Spitzenverschiebung  $w = 250 \text{ cm}$  belastet und dann entlastet. Die Ergebnisse beider Modelle stimmen sehr gut für den gesamten Bereich der Last-Verschiebungs-Kurve überein, siehe Abbildung 3. Dies gilt für elastisches wie für inelastisches Materialverhalten. In Abbildung 4 ist ein Plot der Vergleichsspannung im be- und entlasteten Zustand dargestellt. Abbildung 5 zeigt die Vergleichsspannung über den Querschnitt. Im linken Bild ist der Querschnitt fast vollständig plastiziert, wogegen das rechte Bild den Eigenspannungszustand nach vollständiger Entlastung zeigt.

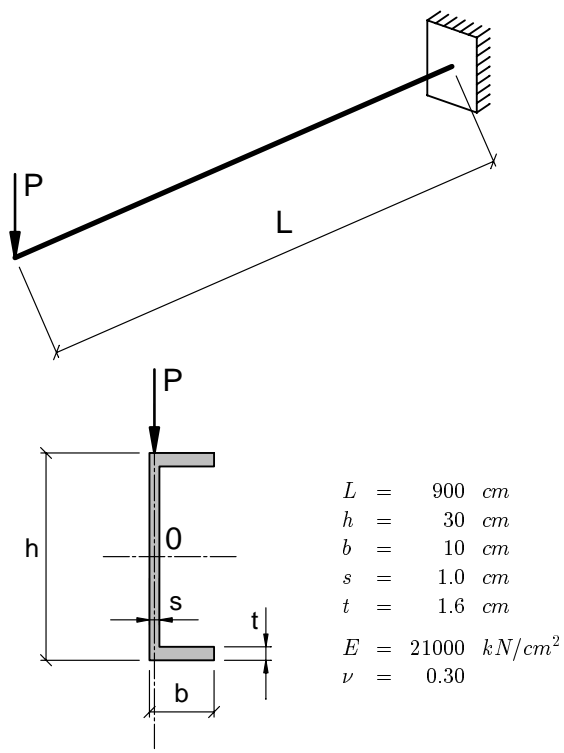


Abbildung 2: U-Profil mit geometrischen und materiellen Daten

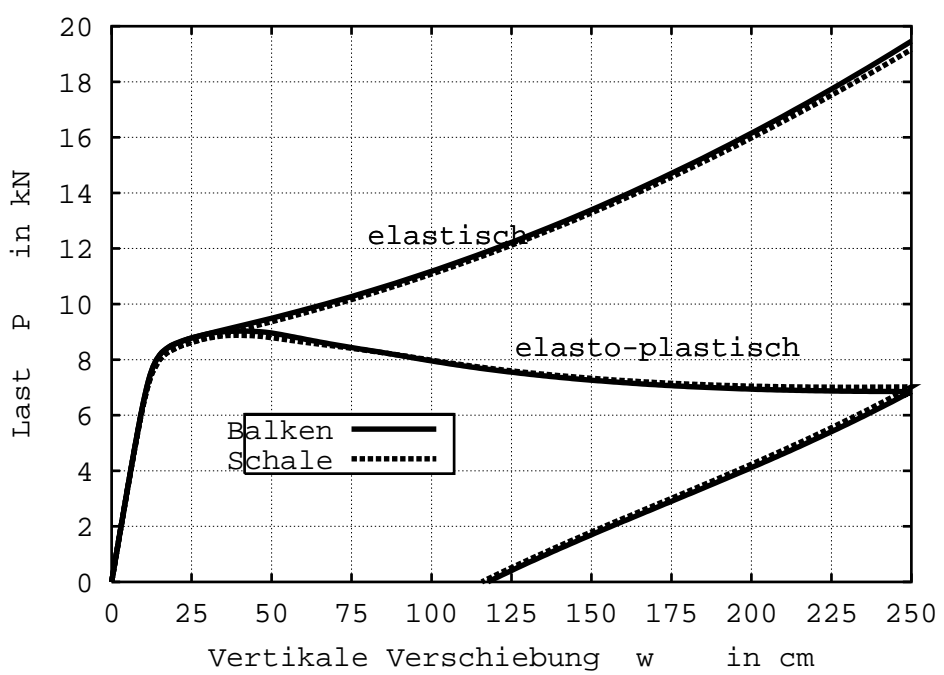


Abbildung 3: Last-Verschiebungs-Kurven des U-Profls

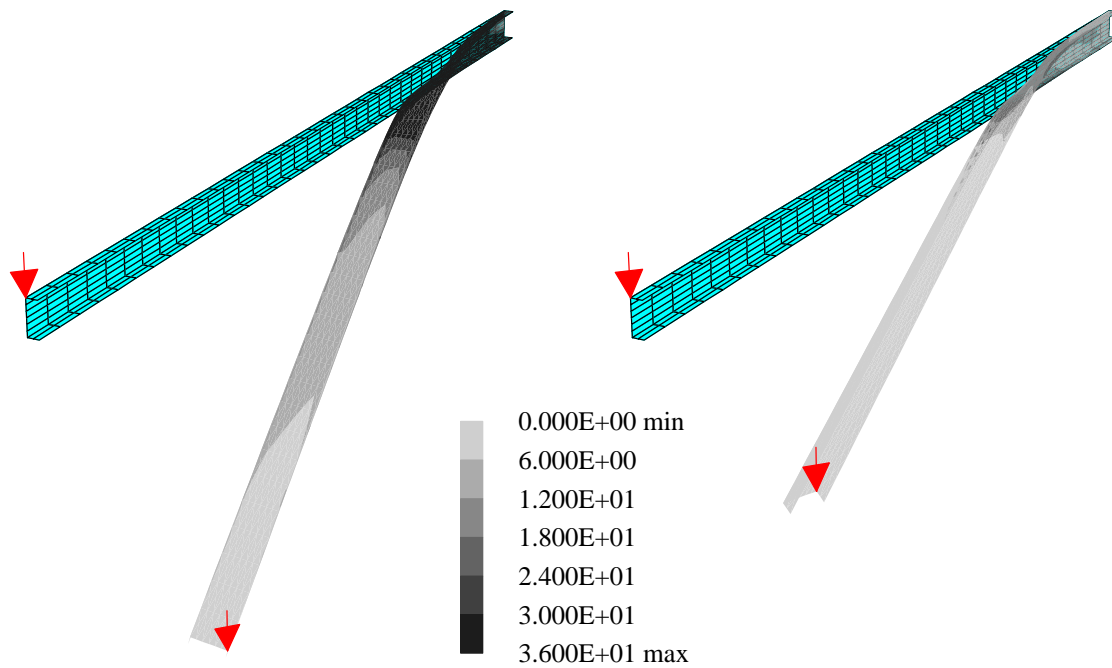


Abbildung 4: Vergleichsspannungen in  $kN/cm^2$  im Traglastzustand und nach Entlastung

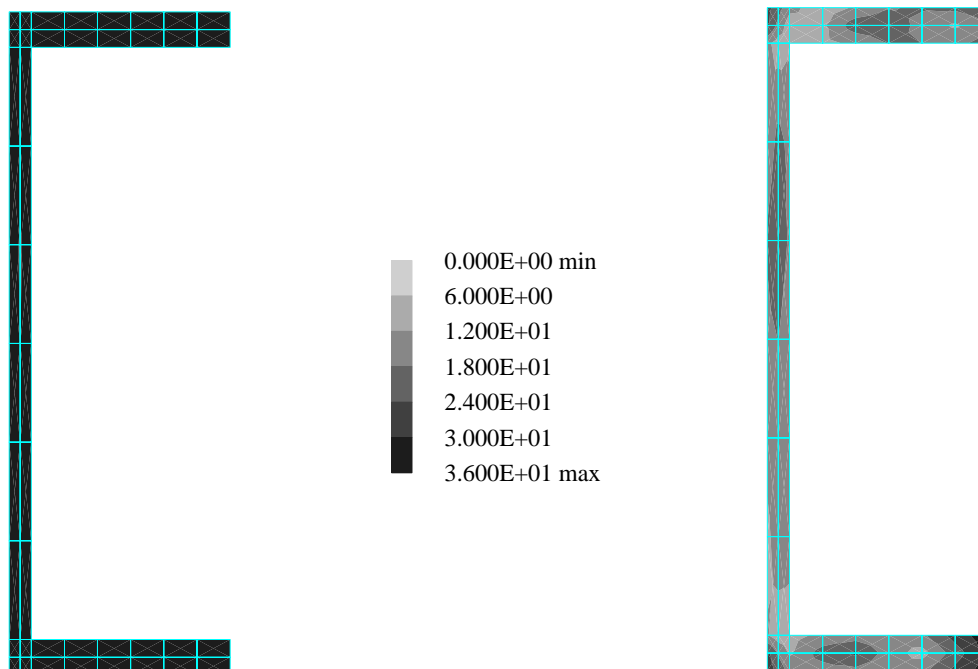


Abbildung 5: Querschnitt im Abstand 225 cm von der Einspannung: Vergleichsspannungen in  $kN/cm^2$  im Traglastzustand und nach Entlastung

## 5.2 Zylinderschale

Als zweites Beispiel wird eine einseitig eingespannte, halbzyklindrische Schale mit radialen Steifen untersucht, siehe auch [14]. Die Belastung erfolgt durch eine Einzellast im First des freien Randes. Die Geometriedaten der Schale sind: Radius  $R = 100\text{ cm}$ , Länge  $L = 200\text{ cm}$  und Dicke  $t = 1\text{ cm}$ . Die exzentrisch angeordneten Rechtecksteifen besitzen einen Querschnitt  $t/h = 1/10\text{ cm}$ . Bei Annahme elastischen Werkstoffverhaltens werden die Materialwerte  $E = 21000\text{ kN/cm}^2$  und  $\nu = 0,3$  angesetzt. Die Steifen sind in Winkelabständen von jeweils  $30^\circ$  angebracht, siehe Abbildung 6. Die Symmetrie der Struktur wird bei der Berechnung ausgenutzt. Die Zylinderschale wird mit  $24 \times 16$  Schalenelementen diskretisiert. Für die Modellierung der Steifen durch Balkenelemente werden 16 zweiknotige Balkenelemente verwendet. Bei einer Vergleichsrechnung mit dem Modell Schale–Schale werden die Steifen mit 2 Elementen über die Höhe abgebildet. Beide Modelle zeigen in der Last–Verschiebungs–Kurve gemäß Abbildung 7 eine gute Übereinstimmung. Der Plot der verformten Konfiguration in Abbildung 8 zeigt, daß die Struktur großen Deformationen unterworfen ist.

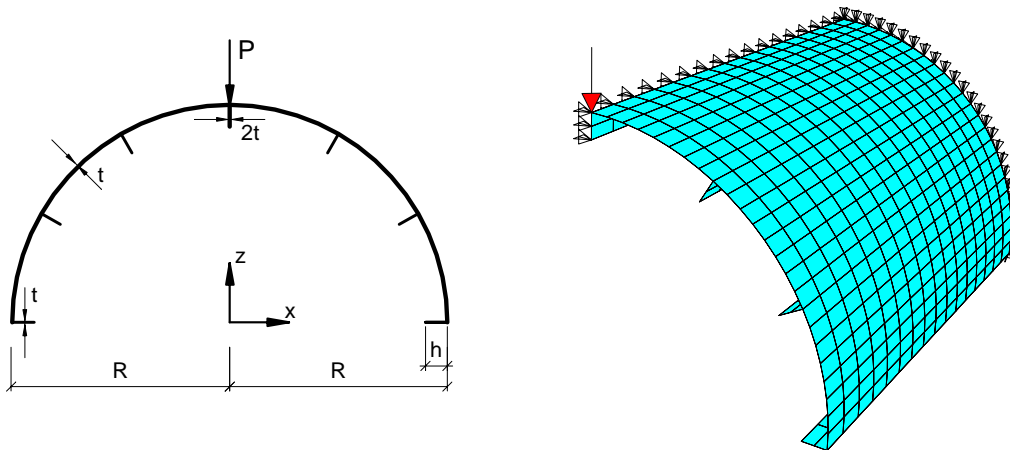


Abbildung 6: Kreiszyklinderschale mit radialen Steifen, Geometrie und Vernetzung

## 6 ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit werden geometrisch und materiell nichtlineare räumliche Balken mit beliebiger Querschnittsform bei großen Deformationen betrachtet. Die Schnittgrößen und zugehörigen Linearisierungen werden durch numerische Integration ermittelt. Die isoparametrische Element–Formulierung für ein  $\xi$ -nites Balkenelement mit 7 Freiheitsgraden pro Knoten ist dargestellt. Die Knotenanzahl der Elemente ist bei Verwendung von Lagrangefunktionen beliebig wählbar. Es werden Last–Verschiebungs–Kurven bei elastoplastischem Materialverhalten für zwei Beispiele berechnet. Die Ergebnisse weisen gute Übereinstimmung mit einer alternativen Schalendiskretisierung auf. Die entwickelten  $\xi$ -niten Balkenelemente erlauben somit die Berechnung von Traglasten dreidimensionaler Stabtragwerke bei beliebiger Querschnittsform.

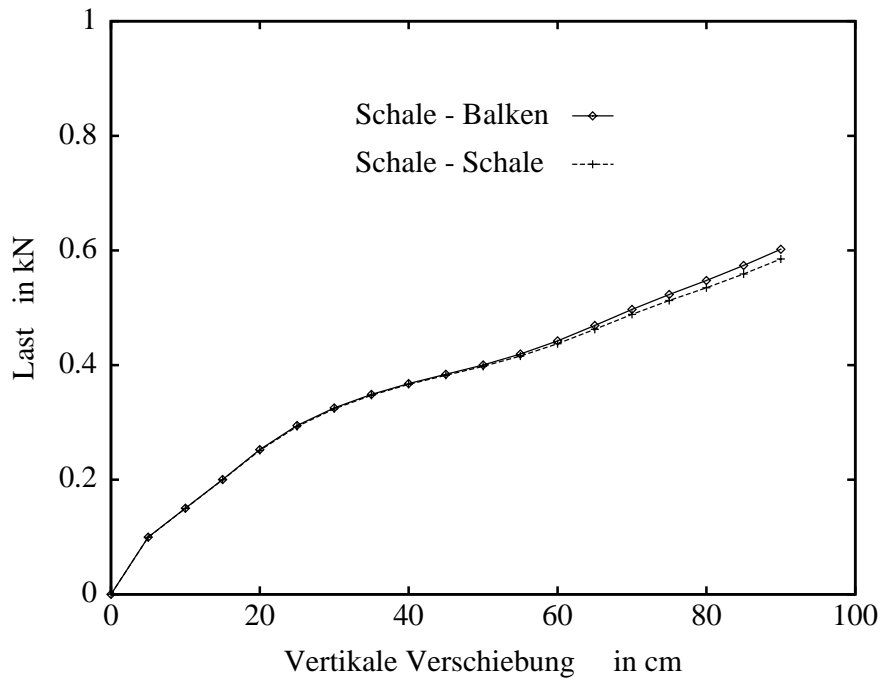


Abbildung 7: Last-Verschiebungs-Kurve des Lastangriffspunktes

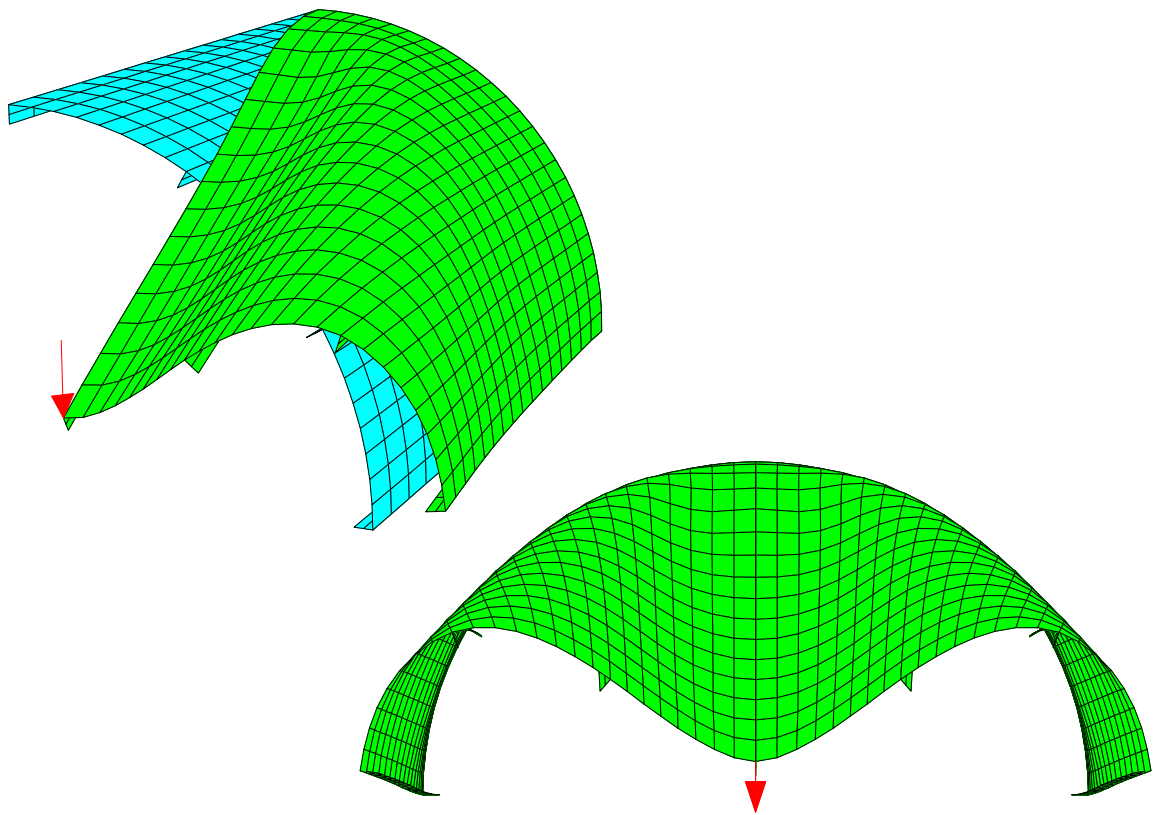


Abbildung 8: Verformungszustand mit Schalendiskretisierung

## LITERATUR

- [1] Argyris J.H., Hilpert O., Malejannakis G.A., Scharpf D.W., 1979: On the geometrical stiffness of a beam in space– A consistent v.w. approach, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 20, 105–131.
- [2] Reissner E. 1981: On finite deformations of space–curved beams, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* Vol. 32, 734–744.
- [3] Guggenberger W. 1999: Nichtlineare Berechnung räumlicher Stabtragwerke– geometrisch exakte Formulierungen und konsistente Approximationen, in: Meskouris (Herausgeber) *Baustatik Baupraxis* 7, Balkema Rotterdam, 91–102.
- [4] Bathe, K.J., Bolourchi, S. 1979 Large displacement analysis of three–dimensional beam structures, *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 14, 961–986.
- [5] Belytschko, T. Hsieh, B.J. 1973: Non–linear finite element analysis with convected coordinates, *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 7, 255–271.
- [6] Crisfield, M.A. 1990: A consistent co–rotational Formulation for non–linear three–dimensional beam elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 81, 131–150.
- [7] Simo, J.C., Vu–Quoc, L. 1986: Three–dimensional finite–strain rod model. Part II: Computational aspects, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 58(1), 79–116.
- [8] Simo, J.C., Vu–Quoc, L. 1991: A geometrically–exact rod model incorporating shear and torsion–warping deformation, *Int. J. Solids Structures* Vol. 27(3), 371–393.
- [9] Cardona, A. Gérardin, M. 1988: A beam finite element non–linear theory with finite rotations, *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 26, 2403–2438.
- [10] Gruttmann, F., Wagner, W., Sauer, R. 1998: Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente, *Bauingenieur*, Band 73(3), 138–143.
- [11] Betsch, P., Menzel, A., Stein, E. 1998: On the parametrization of finite rotations in computational mechanics, A classification of concepts with application to smooth shells, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 155, 273–305.
- [12] Gruttmann, F., Sauer, R., Wagner, W. 2000: Theory and Numerics of Three–Dimensional Beams with Elastoplastic Material Behaviour, *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. 48, 1675–1702.
- [13] Gruttmann, F., Sauer, R. Wagner, W. 1998: A Geometrical Nonlinear Eccentric 3D–Beam Element with Arbitrary Cross–Sections, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 160, 383–400.
- [14] Sauer, R. 1998: Eine einheitliche Finite–Element–Formulierung für Stab– und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen, Bericht Nr. 4, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.