Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Numerische Untersuchung der Systemantwort von Tragwerken mit zufallsverteilten Materialeigenschaften unter Verwendung der Monte-Carlo-Simulation

Patrick Weber

1. Einleitung

Zur genaueren Abbildung realer Prozesse in der Strukturmechanik bietet sich die Betrachtung zufallsbasierter Materialparameter an. Dazu kann beispielsweise der E-Modul als stochastisches Feld in eine Finite-Element-Formulierung implementiert werden. Die Zusammenhänge der stochastischen Parameter der Ein- und Ausgangsfelder spielen bei den Untersuchungen eine zentrale Rolle. Auch die Verwendung eines geometrisch nichtlinearen Verzerrungsmaßes beeinflusst die stochastische Verteilung der Systemantwort und muss berücksichtigt werden.

2. Korreliertes Zufallsfeld

Die Korrelation eines Zufallsfeldes wird durch eine vorgegebene Kovarianzmatrix erreicht.

$$\boldsymbol{C}(i,j) = \exp\left(-\left|\frac{d(i,j)}{l_c}\right|\right),$$

Der Zusammenhang zwischen zwei Knoten nimmt exponentiell ab mit zunehmendem Abstand $d(i,j)$. Außerdem kann mit der sogenannten Korrelationslänge l_c diese Kovarianzfunktion gesteuert werden. Mithilfe der *Karhunen-Loève-Transformation* wird nun ein korreliertes Zufallsfeld $\boldsymbol{H}$ dargestellt durch

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\theta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\theta)\sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}).$$

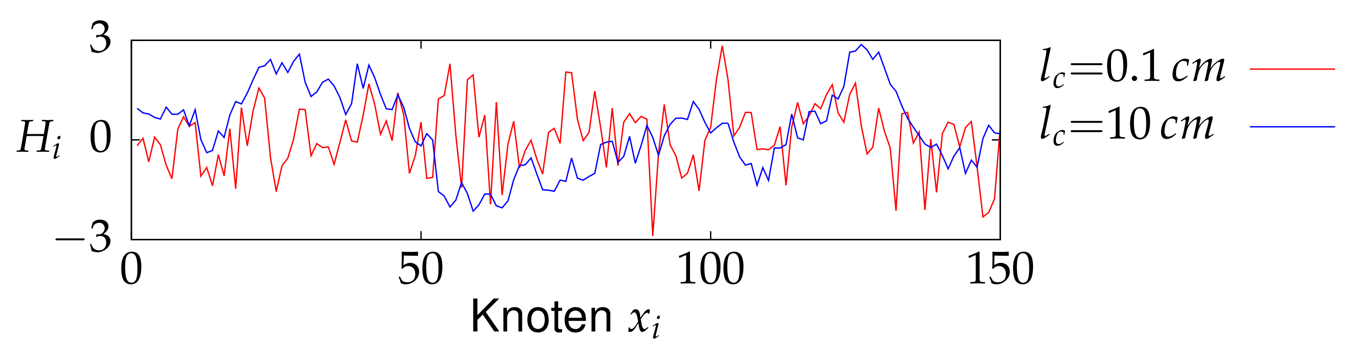
Die Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ der Kovarianzmatrix bilden dabei die orthogonale Basis. Die Eigenwerte λ_i sowie die aus einer gaußnormalverteilten Grundgesamtheit $\{\theta \in \Theta\}$ stammenden Zufallszahlen $\xi_i(\theta)$ bilden die Wichtungen. Damit lässt sich die E-Modul-Verteilung

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\theta) = \sigma_E \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\theta) + \mu_E,$$

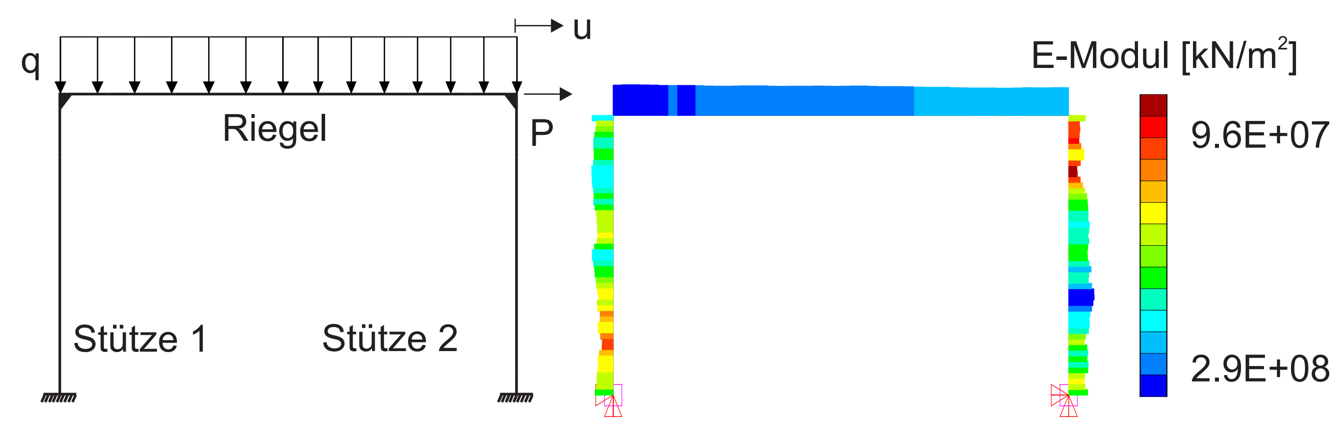
mit dem Mittelwert μ_E und der Standardabweichung σ_E formulieren. Dieses Feld wird anschließend in die FE-Formulierung der Steifigkeitsmatrizen implementiert.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^e(\theta) &= \boldsymbol{K}_0^e + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i^e\,\xi_i(\theta)\\
\boldsymbol{K}_0^e &= \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^T\,\mu_E\,\boldsymbol{B}\,d\Omega^e\\
\boldsymbol{K}_i^e &= \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^T\,\sigma_E\,\sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{B}\,d\Omega^e
\end{aligned}$$

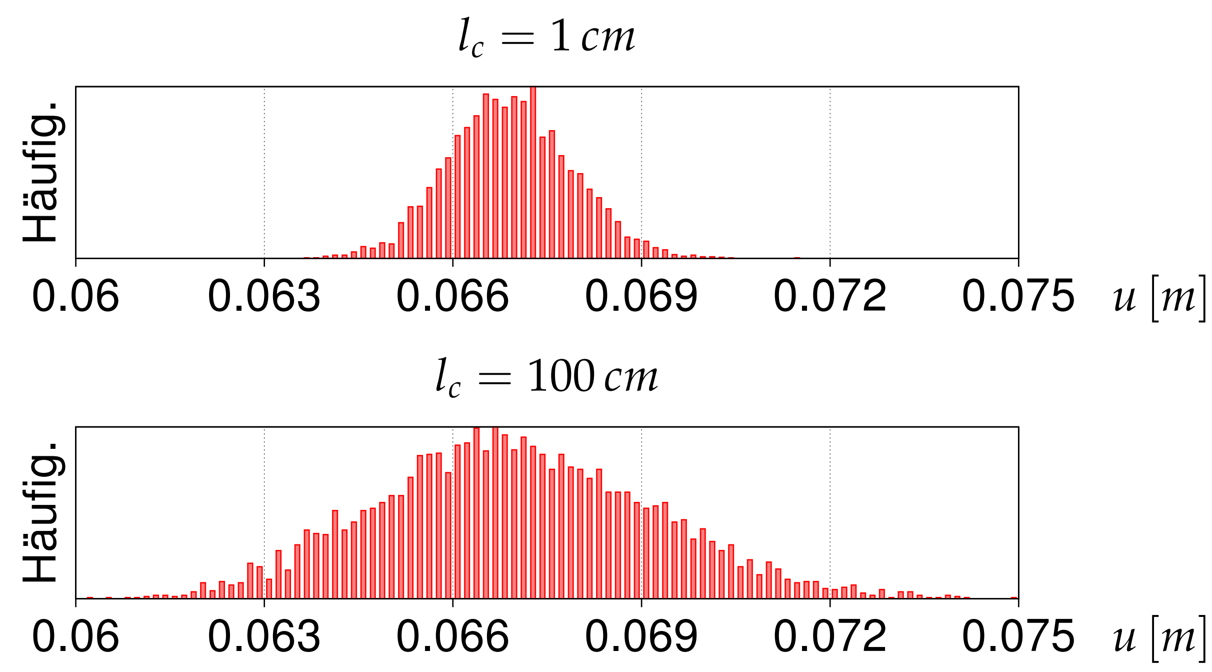
Mit Variation der Korrelationslänge wird der Verlauf des Feldes beeinflusst. Je größer die Korrelationslänge, desto gleichmäßiger die erzeugte Verteilung. Allerdings entstehen durch die Korrelation im Vergleich zu dem unkorrelierten Feld $\xi(\theta)$ Änderungen in den stochastischen Attributen. Diese sind nicht nur abhängig von der Wahl der Korrelationslänge, sondern auch von der Anzahl der Netzknoten.



3. Numerisches Beispiel



Als numerisches Beispiel wird ein biegesteifer Rahmen betrachtet und die stochastische Verteilung der Verschiebung u untersucht. Ein korreliertes E-Modulfeld $[kN/m^2]$ wird mit verschiedenen Korrelationslängen pro Bauteil auf die Knoten des FE-Netzes generiert.



Mit der Monte-Carlo-Simulation werden statistische Attribute der Systemantwort angenähert. Durch die Zunahme der Wahrscheinlichkeit extremal gemittelter E-Module über den Stab steigt die Streuung mit Erhöhung der Korrelationslänge. Bei Verwendung eines geometrisch nichtlinearen Verzerrungsmaßes werden die Verschiebungen im Falle einer Zugbeanspruchung geringer. Durch diesen Versteifungseffekt verringert sich die Streuung der Systemantwort und die Verteilung wird unsymmetrisch.