Karlsruher Institut für Technologie

BAUSTATIK

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Erweiterungskonzepte linearer Dreieckselemente zur Vermeidung von geometrischen und materiellen Versteifungseffekten

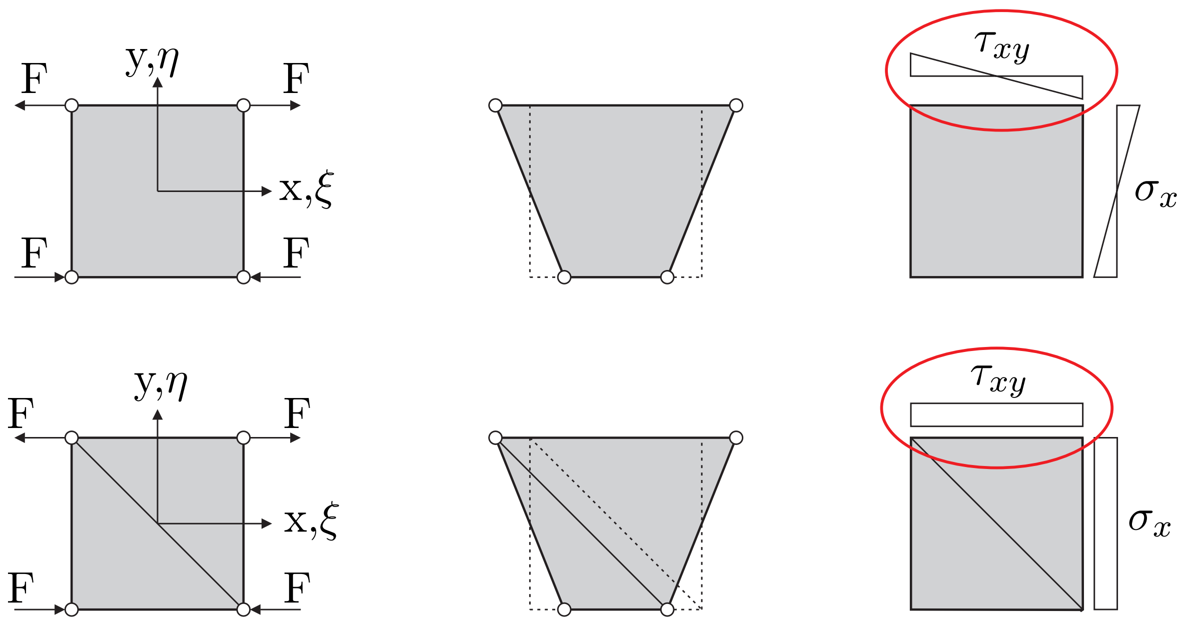
Tobias Steiner

1. Motivation und Ziel

Bereits in der Mitte der 1960er Jahre entstanden erste Arbeiten, die sich mit dem versteifenden Verhalten linearer Dreieckselemente (CST-Elemente) beschäftigt haben. Zur Beschreibung des Locking-Phänomens wird zwischen geometrischen (Schublocking) und materiellen (Volumenlocking) Versteifungseffekten unterschieden. Ziel ist es, das CST-Element mittels freier Lösungsvariablen zu erweitern, um dadurch Versteifungseffekte zu vermeiden.

2. Vermeidung von Schublocking - Die u/v-Formulierung

Schubversteifungen treten bei der Simulation von Biegezuständen mit Elementen niederer Ansatzordnung auf. Daraus resultieren versteifende Schubspannungen τ_{xy}, die durch Erweiterung des Funktionals mit zusätzlichen Verschiebungsfreiheitsgraden vermieden werden sollen.



Grundlage der gemischten u/v-Formulierung bildet eine Potentialformulierung. Durch Erweiterung mit inkompatiblen Verzerrungen ε_v ergibt sich nachfolgende Gleichung.

$$\Pi_i^e = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon_u + \varepsilon_v)^T\,\mathbf{C}\,(\varepsilon_u + \varepsilon_v)\,\mathrm{d}V + \Pi_{ext}^e$$

Nach Variation und FE-Diskretisierung erhält man folgende Matrix-Schreibweise.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K_{uu}} & \mathbf{K_{uv}}\\ \mathbf{K_{vu}} & \mathbf{K_{vv}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{v}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ext}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

Die Anteile der inkompatiblen Verschiebungen dürfen unter konstanter Spannung keinen Beitrag zur inneren Arbeit leisten. Daraus folgt:

$$\mathbf{K_{vu}} = \int_\Omega \mathbf{B}_v^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}_u\,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}_v^T\,\mathrm{d}V}_{\overset{!}{=}0}\;\underbrace{\sigma}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

Das Gleichungssystem reduziert sich für jeden Spannungszustand zu:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K_{uu}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K_{vv}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{v}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ext}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

Mit $\mathbf{K_{vv}}\cdot\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ resultiert die bekannte Form $\mathbf{K_{uu}}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext}$. Eine Erweiterung des CST-Elements mit inkompatiblen Moden erzielt demnach keinen Effekt.

3. Vermeidung von Volumenlocking - Die u/p-Formulierung

Volumenlocking tritt im Bereich nahezu inkompressiblen Materialverhaltens ($\nu \to 0{,}5$) auf. Dadurch verhält sich $K \to \infty$ und $\varepsilon_v \to \infty$. Mittels eigener Ansätze für $\varepsilon_{vol} = p$ sollen volumetrische Versteifungen verhindert werden.

$$(1)\qquad \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}'^T\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}'\,\mathrm{d}V + \int_\Omega \delta\varepsilon_{\mathrm{vol}}\,p\;\mathrm{d}V \;=\; \mathbf{F}_{ext}$$

$$(2)\qquad \int_\Omega \Big(\frac{p}{K} + \varepsilon_{\mathrm{vol}}\Big)\,\delta p\;\mathrm{d}V \;=\; 0$$

Dabei beschreibt (1) den deviatorischen und volumetrischen Anteil und (2) die schwach erfüllte Bedingung auf Grund der freien Druckvariablen.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up}\\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{p}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ext}\\ 0\end{bmatrix}$$

Eine statische Kondensation führt zu:

$$\underbrace{\left(\mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up}\,\mathbf{K}_{pp}^{-1}\,\mathbf{K}_{pu}\right)}_{\mathbf{K}_{\mathrm{u/p}}}\,\hat{\mathbf{u}} \;=\; \mathbf{F}_{ext}$$

Ein Vergleich der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\mathrm{u/p}}$ mit $\mathbf{K}_{\mathrm{u}}$ der Standardformulierung ergibt identische Einträge - eine Anreicherung zeigt keinen Effekt.

4. Die u/v/p-Formulierung

Die u/v/p-Formulierung soll sowohl Schub- als auch Volumenlocking vermeiden. Grundlage dafür bildet, wie auch bei der u/p-Formulierung, das Prinzip der virtuellen Arbeit.

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}'_u + \boldsymbol{\varepsilon}'_v \qquad\qquad \varepsilon_{\mathrm{vol}} = \varepsilon_{\mathrm{vol},u} + \varepsilon_{\mathrm{vol},v}$$

Hier wurden die deviatorischen und volumetrischen Verzerrungen um einen inkompatiblen Anteil erweitert. Mittels FE-Diskretiersung und Verwendung obiger Annahme der inkompatiblen Moden erhält man für konstanten Druck:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{uu} & 0 & \mathbf{K}_{up}\\ 0 & \mathbf{K}_{vv} & 0\\ \mathbf{K}_{pu} & 0 & \mathbf{K}_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{u}}\\ \hat{\mathbf{v}}\\ \hat{\mathbf{p}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ext}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

Mit $\mathbf{K_{vv}}\cdot\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ und $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ resultiert das Gleichungssystem der u/p-Formulierung. Somit erhält man mit der u/v/p-Formulierung auch keine aufweichende Wirkung.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Es hat sich gezeigt, dass mit den verwendeten Elementerweiterungen kein Effekt erzielt werden konnte. Im Verlauf der Arbeit wurden weitere Variationen untersucht. Durch die Anreicherung des quadratisch interpolierten Dreieckselements, konnte das Ergebnis beeinflusst werden. Man kann davon ausgehen, dass das Verhältnis der Ansatzordnung sowie Anwendung statischer Kondensation eine Rolle spielen. Um aussagekräftige Beurteilungen treffen zu können sind jedoch weitere Untersuchungen notwendig.