

Theorie und FE-Modellierung eines viskoelastischen 2D-Timoshenko-Balkenelements

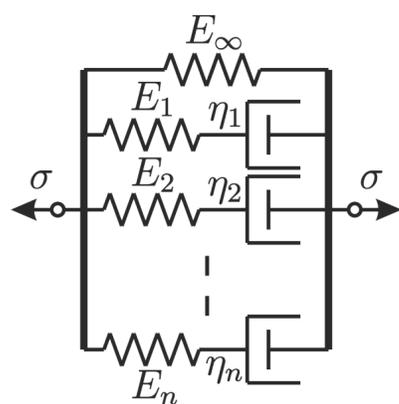
Jan Zoller

1. Einleitung

Viskoelastische Werkstoffe, wie z.B. Kunststoffe, Bitumen aber auch Holz sowie Stahl im erhöhten Temperaturbereich, weisen sowohl Eigenschaften elastischer Feststoffe als auch viskoser Flüssigkeiten auf. Ihr Verhalten äußert sich neben einem möglichen elastischen Anfangsverhalten durch Kriech- und Relaxationserscheinungen, die beispielsweise bei der zeitabhängigen Zunahme der Durchbiegung von Tragwerken oder beim Spannkraftverlust von Spannstahl beobachtet werden können. Das Materialverhalten ist also zeitabhängig, genauer gesagt abhängig von der Belastungs- bzw. Deformationsgeschichte des Werkstoffs.

2. Mechanik viskoelastischer Werkstoffe

Festgelegt wird das Verhalten eines Werkstoffs anhand charakteristischer Materialfunktionen, die durch Kennwertversuche wie dem Kriech- und Relaxationsversuch bestimmt werden. Für die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Struktur und des Verhaltens des Werkstoffs bedient man sich der Modellrheologie. Damit lassen sich durch Feder-Dämpfer-Modelle viskoelastische



Phänomene qualitativ beschreiben. Die Maxwell-Gruppe, bestehend aus n-Maxwell-Körpern und einer Hooke'schen Feder parallel geschaltet, gilt als verallgemeinertes Modell für viskoelastische Werkstoffe. Ihre Relaxationsfunktion $E(t)$ ergibt sich aus Superposition der Einzelspannungen je Teilkörper zu:

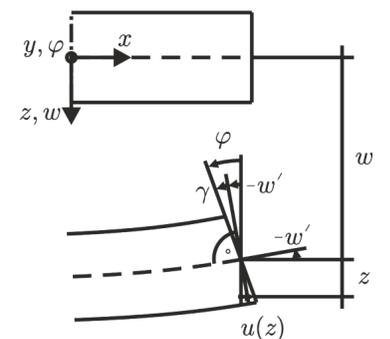
$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i}$$

3. Algorithmus des Stoffgesetzes

Für die numerische Umsetzung viskoelastischen Materialverhaltens wird eine rekursive Formulierung des Stoffgesetzes verwendet. Basis hierfür stellt die geschichtsabhängige Formulierung der Federdehnung $q_i(t)$ eines Maxwell-Körpers dar: $q_i(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}} q_i(t_n) + \Delta q_i$. Demnach ergibt sich die aktuelle Federdehnung aus der letztbekannten und der Berücksichtigung eines Updates infolge der Deformation im vorangegangenen Zeitintervall. Durch Superposition der Einzelspannungen einer Maxwell-Gruppe ist damit auch die Spannung bekannt, die im Weiteren die Größe der Materialtangente $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ bestimmt. Die Spannungen müssen für die Verwendung im Rahmen der FEM für Stabtragwerke in Schnittgrößen umgewandelt werden.

4. Timoshenko-Balken-Theorie

In der Timoshenko-Balken-Theorie wird ebenso wie in der Bernoulli-Balken-Theorie angenommen, dass ein Querschnitt auch im verformten Zustand eben bleibt. Jedoch kann sich der Querschnitt um einen zusätzlichen Winkel γ um die Schwerachse verdrehen, wodurch Schubverzerrungen berücksichtigt werden. Die Gesamtverdrehung φ tritt damit entkoppelt von der Verschiebung w in Richtung quer zum Stab auf. Mit der Verschiebung u in Stabrichtung existieren in der Timoshenko-Balken-Theorie somit drei unabhängige Kinemat.

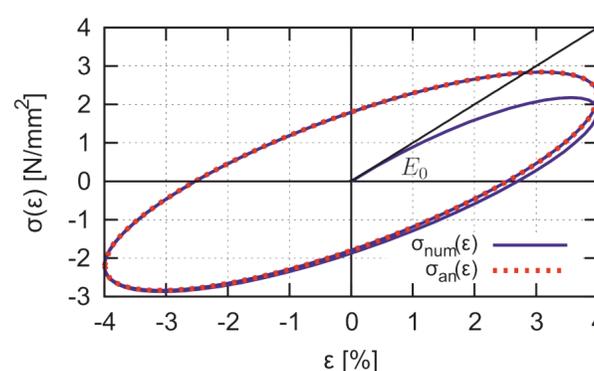


5. Implementierung in die FEM

Basierend auf den drei Differentialgleichungen der Balkentheorie wird die schwache Form des gegebenen Randwertproblems hergeleitet. Dieses lässt sich mit Hilfe der FEM numerisch lösen. Dazu wird die innere Arbeit δW_i und äußere Arbeit δW_a gleichgesetzt. Da sich die Schnittkräfte aufgrund innerer Abhängigkeiten nicht als lineare Abbildung des Verzerrungsvektors darstellen lassen, ist eine alternative Herangehensweise im Vergleich zur rein linearen FEM erforderlich. Der Zustand des momentanen Gleichgewichts wird dabei iterativ unter Verwendung des Newton-Raphson-Verfahrens ermittelt. Für die Berechnung des Vektors der inneren Kräfte wird sich dabei der Schnittkräfte, für die der tangentialen Steifigkeitsmatrix der Materialtangente aus dem viskoelastischen Algorithmus bedient.

6. Numerische Beispiele

Zur Untersuchung viskoelastischer Materialien werden häufig dynamisch-mechanische Analysen (DMA) durchgeführt. Dabei wird eine harmonische Einwirkung, hier in Form eines sinusförmigen Dehnungsverlaufs, aufgebracht. Nach einem Einschwingvorgang



geht das Verhalten in eine sogenannte Dauerlösung über. Zur Verifizierung des implementierten Materialmodells wird hier beispielhaft die sich ergebende Hysteresekurve für eine DMA dargestellt.