Ein Weggrößenverfahren zur Berechnung von Querkraftschubspannungen in dünnwandigen Querschnitten

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Vertieferarbeit von Alexander Butz

Einführung

Mit dem hier dargestellten Weggrößenverfahren können Schubspannungen infolge Querkraftbeanspruchung in dünnwandigen Profilen berechnet werden. Dabei ist die Geometrie des Querschnitts beliebig.

Grundlagen

Der betrachtete prismatische Stab soll nur durch die Biegemomente M_y und M_z, sowie die Querkräfte Q_y und Q_z torsionsfrei belastet werden. Für die Verschiebung in Stablängsrichtung wird folgende Annahme getroffen:

$$u_x = \beta_y(x)\,\bar{z} - \beta_z(x)\,\bar{y} + \tilde{\varphi}(y,z) \tag{1}$$

Neben den bekannten Verschiebungsanteilen wird die Stabkinematik um den Ausdruck $\tilde{\varphi}(y,z)$ erweitert, mit dem die Verwölbung infolge von Schubspannungen berücksichtigt wird.

Der Querschnitt wird mit Zweiknotenelementen diskretisiert. Jeder Knoten besitzt einen Freiheitsgrad, der die Verschiebung in Stablängsrichtung (Verwölbung) beschreibt.

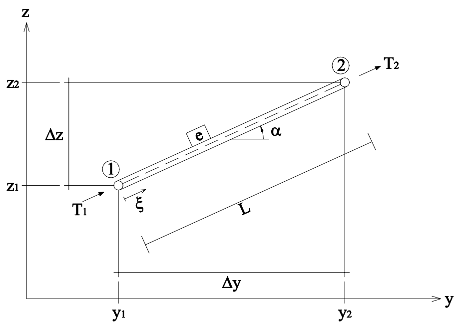

Abb. 1: Zweiknotenelement

Davon ausgehend wird eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in ξ-Koordinaten formuliert, die exakt gelöst werden kann.

$$\varphi_{,\xi\xi} = -\frac{L^2}{G}\left[(a_y \Delta y + a_z \Delta z)\,\xi + a_y \bar{y}_1 + a_z \bar{z}_1\right] \tag{2}$$

Mit der Lösung der Differentialgleichung ist es möglich, die Elementsteifigkeitsmatrix und den Elementlastvektor zu definieren:

$$\mathbf{k}_e = \frac{G\,t}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_e = \frac{G\,t}{L}\begin{bmatrix} -c_3 - c_4 \\ -c_3 - 2c_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Mit den resultierenden Knotenverschiebungen kann der Schubflußverlauf für jedes Element durch Spannungsrückrechnung ermittelt werden.

$$T(\xi) = \frac{G\,t}{L}\,(c_2 + 2\,c_3\,\xi + 3\,c_4\,\xi^2) \tag{4}$$

Aufgrund der analytischen Lösbarkeit der zugrundeliegenden Differentialgleichung können die Knotenzwischenwerte ebenfalls genau berechnet werden. Die Ergebnisse sind somit im Rahmen der verwendeten Biegetheorie exakt.

Numerisches Beispiel

Untersucht wird ein unsymmetrischer, gemischt offen-geschlossener, zweizelliger Querschnitt nach PETERSEN, der mit einer positiven Querkraft Q_z belastet wird:

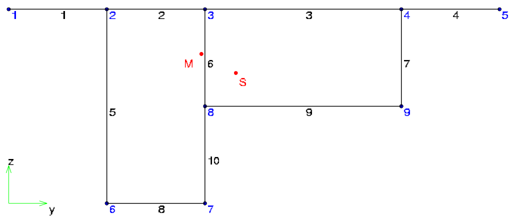

Abb. 2: Diskretisierter Querschnitt

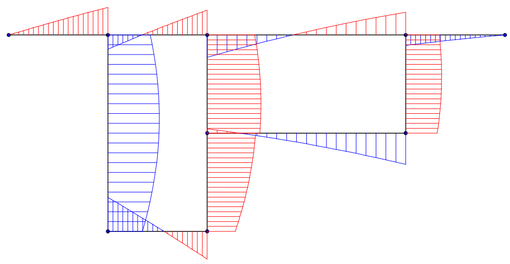

Abb. 3: Schubflußverlauf

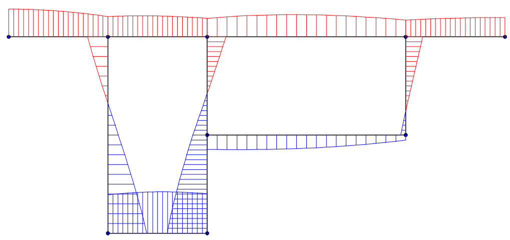

Abb. 4: Verwölbung des Querschnitts

Die nichtlinearen Anteile der Querschnittsverwölbung, die durch die Berücksichtigung der Schubverformungen auftreten, sind deutlich erkennbar.