Formulierung und Programmierung eines Finiten Elements zur Berechung von Gerüsttragwerken

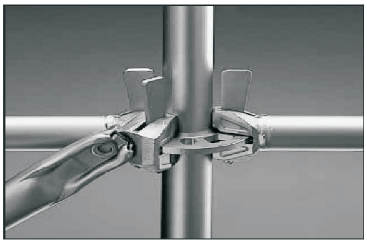
Universität Karlsruhe (TH)

Diplomarbeit von Xinying Guo

BAUSTATIK

Einleitung

Gerüste zeichnen sich im Gegensatz zu Stabtragwerken durch ihre Nachgiebigkeit an den Verbindungsstellen aus. Man kann also zeigen, dass ein Gerüstknoten nachgiebig ist.



Sowohl für die Momente als auch für Normal- und Querkräfte werden die Gerüststabenden im statischen System durch entsprechende Federn ergänzt. Das nachgiebig angeschlossene Stabelement wird im folgenden entwickelt.

Steifigkeitsmatrix

Das Berechnungsmodell kann als mit Feder gelagerter Stab betrachtet werden, dessen Federsteifigkeit zwischen dem gelenkig angeschlossenen Fachwerkstab und dem eingespannten Stab liegt.

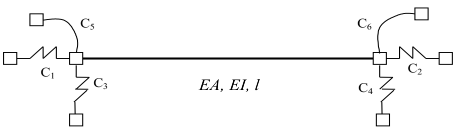


Abb.1: Berechungsmodell

C_1 und C_2 : x- Richtungsfedersteifigkeit.
C_3 und C_4 : z- Richtungsfedersteifigkeit.
C_5 und C_6 : θ - Richtungsfedersteifigkeit.
Mit dem Verschiebungsgrößenverfahren kann man die Gesamtsteifigkeitsmatrix ermitteln.
Die Freiheitsgrade umfassen nicht nur die äußeren $\mathbf{u}^\mathbf{a}$, sondern auch die inneren $\mathbf{u}^\mathbf{i}$ Freiheitsgrade. Die neue geordnete Gesamtsteifigkeitsbeziehung lautet:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\mathbf{aa}} & \mathbf{K}^{\mathbf{ia}} \\ \mathbf{K}^{\mathbf{ia}} & \mathbf{K}^{\mathbf{ii}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\mathbf{a}} \\ \mathbf{u}^{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\mathbf{a}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Die inneren Freiheitsgrade $\mathbf{u}^\mathbf{i}$ sind bei der Berechnung überflüssig, nur die äußeren Freiheitsgrade $\mathbf{u}^\mathbf{a}$ sind wichtig. Deswegen soll hier $\mathbf{u}^\mathbf{i}$ eliminiert werden. Die statische Kondensation wird verwendet, um die Zahl der vorhandenen Freiheitsgrade zu reduzieren.

Kondensationsmatrix

Die vereinfachte Kondensationsmatrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{pmatrix}$$

Die Terme sind abhängig von der Federsteifigkeit, z.B.:

$$k_{11} = \frac{C_1 C_2 EA}{C_1 C_2 l + (C_1 + C_2)EA}$$

$$k_{22} = \frac{12 C_3 C_4 EI[1 - \frac{3C_3C_4EI(C_5l+C_6l+4EI)/l^2}{\Delta}]}{C_3 C_4 l^3 + 12(C_3 + C_4)EI}$$

$$\Delta = (C_3C_4 + (C_3+C_4)12\tfrac{EI}{l^3})(C_5C_6 + (C_5+C_6)4\tfrac{EI}{l} + 12(\tfrac{EI}{l})^2)$$
$$-(C_3+C_4)(C_5+C_6+4\tfrac{EI}{l})(6\tfrac{EI}{l^2})^2$$

Beispiel

In diesem Beispiel werden die Beziehungen von Biegemoment bzw. Verdrehung und Drehfeder analysiert. Wenn die Drehfeder weich ist, so trägt das entsprechende Element nur ein geringes Biegemoment ab und die Verdrehung ist relativ groß. Je steifer die Feder ist, desto größer ist das Biegemoment und umso kleiner ist die Verdrehung. Ab einer gewissen Größe wird quasi die Volleinspannung erreicht, sodass sich Biegemoment und Verdrehung nicht weiter ändern.

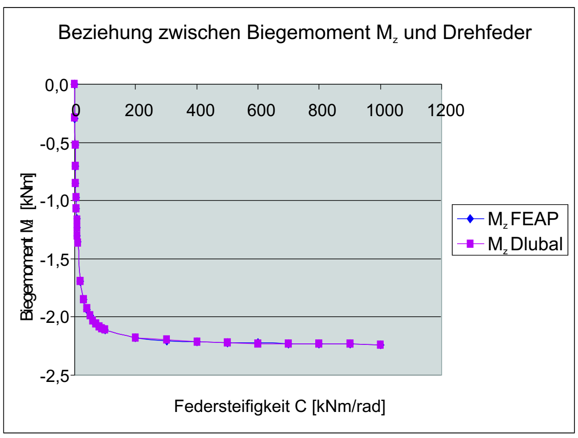


Abb.2: $M - C$ Diagramm