

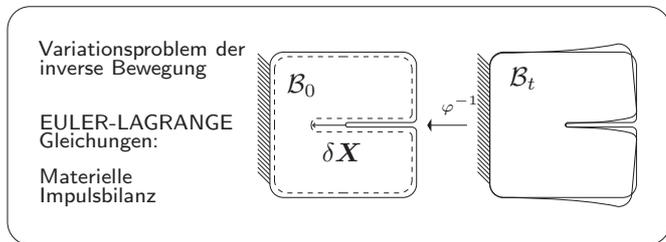
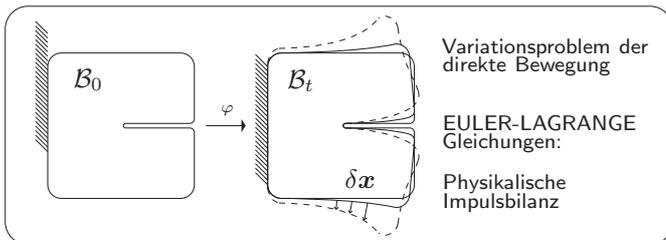


Mechanik der materiellen Kräfte

Bei den materiellen Erhaltungssätzen handelt es sich um die kanonische Projektion der wohlbekannten physikalischen Erhaltungssätze auf die materielle Mannigfaltigkeit. Diese Sichtweise der materiellen Erhaltungssätze wird u.a. von G.A. MAUGIN vertreten. Eine weitere Sichtweise besteht darin, die materielle Impulsbilanz als grundlegendes Prinzip der Physik - als physikalisches Naturgesetz - aufzufassen, siehe M.E. Gurtin.

Erhaltungssatz des materiellen Impulses

Erfolgt die Formulierung des Variationsproblems in Sinne der inversen Bewegung, so bringen die entsprechenden EULER-LAGRANGE Gleichungen die materielle Impulsbilanz zum Ausdruck. Für das Variationsproblem der direkten Bewegung lassen sich die materiellen Erhaltungssätze auf der Grundlage des NOETHER-Theorems herleiten.



Elektroelastizitätstheorie für das Dielektrikum

Aus dem Variationsproblem der direkten Bewegung für das Dielektrikum ergeben sich die Bilanzgleichungen der physikalischen Kräfte und der elektrischen Ladungen als EULER-LAGRANGE Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_{fix.}} - \text{DIV } \mathbf{P} = \mathbf{f}_0 \quad \text{und} \quad \text{DIV } \vec{\mathbf{D}} = q_{V,f} \quad \text{für } \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0.$$

Die entsprechenden natürlichen Randbedingungen lauten

$$\mathbf{P}\mathbf{N} = \mathbf{t}_0 \quad \text{für } \mathbf{X} \in \partial_t \mathcal{B}_0, \quad \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{N} = q_{A,f} \quad \text{für } \mathbf{X} \in \partial_q \mathcal{B}_0.$$

Die elektrische Enthalpie $W_0(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})$ muß das transversal isotrope Werkstoffverhalten der Piezokeramiken zum Ausdruck bringen und führt auf die konstitutiven Beziehungen:

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \vec{\mathbf{E}}} = -\vec{\mathbf{D}}.$$

Materielle Kräfte in Piezokeramiken

Durch das NOETHER-Theorem ergibt sich für die Piezokeramik der Erhaltungssatz des materiellen Impulses

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_{fix.}} - \text{DIV } \mathcal{B} = \mathbf{f}_0^{inh},$$

der sich aus dem materiellen Impuls \mathcal{P} , dem materiellen Spannungstensor \mathcal{B} und der Inhomogenitätenkraft \mathbf{f}_0^{inh} zusammensetzt:

$$\mathcal{P} = -\rho_0 \mathbf{F}^T \mathbf{v},$$

$$\mathcal{B} = -\mathcal{L} \mathbf{1}_R - \mathbf{F}^T \mathbf{P} + \vec{\mathbf{E}} \otimes \vec{\mathbf{D}},$$

$$\mathbf{f}_0^{inh} = \frac{1}{2} \text{Grad } \rho_0 \mathbf{v}^2 - \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{expl.} - \mathbf{F}^T \mathbf{f}_0.$$

Numerische Beispiele

Für ein unendlich ausgedehntes, piezoelektrisches Medium, in dem ein gerader Riß eingebettet ist, wurden die Rißöffnungsarten Modus I-III untersucht. Die auf die Rißspitze wirkenden materiellen Kräfte lassen sich in einen mechanischen und elektrischen Anteil zerlegen.

