

## Variationsformulierung

Die Natur verrichtet Vorgänge stets mit geringstem Energieaufwand. Dieses Wissen macht man sich in der Variationsrechnung zu Nutze. Das Gesamtpotential eines Systems setzt sich aus den von außen auf das System aufgetragenen Einwirkungen und den aus den Verformungen resultierenden inneren Kräften zusammen. Daraus folgt die Bilanzgleichung

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \Pi_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) .$$

Für den Ansatz des Potentials der inneren Kräfte kommt das sog. Dreifeld-HU-WASHIZU-Funktional zum Einsatz.

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \int_{B_0} W_{0S} - \mathbf{S} : (\mathbf{E}^* - \mathbf{E}) \, dV$$

mit der Formänderungsenergie

$$W_{0S} = W_{0S}(\mathbf{E}^*) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^* : \mathbf{C} : \mathbf{E}^*$$

und den HYBRIDEN Verzerrungen

$$\mathbf{E}^* = \frac{det \mathbf{J}^0}{det \mathbf{J}} \mathbf{T}_E^0 \mathbf{M} \alpha .$$

Das Potential der äußeren Kräfte ist bekannt unter der Beziehung

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA .$$

## Finite Element Approximation

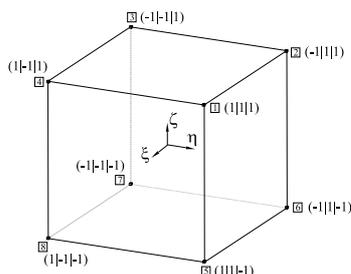
Mit Hilfe der trilinearen Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) (1 + \zeta_I \zeta)$$

werden die Verschiebungen

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{v}_I$$

approximiert. Dabei beziehen sich die Ansatzfunktionen auf ein normiertes Element der Länge 2.



## Anforderung an den HYBRIDEN Verzerrungsansatz

Zur Unterdrückung von Null-Energieformen wird die LADYSHENSKAJA-BABUSKA-BREZZI-Bedingung eingehalten

$$\sup_{\delta \mathbf{x} \in \delta \mathbf{x}^h} \frac{\int_{B_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV}{\|\delta \mathbf{x}\| \|\delta \mathbf{E}\|^*} \geq 0$$

und die Interpolationsmatrix wie folgt eingeführt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \eta & \zeta & \eta \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \zeta & \xi \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

## Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Für die konsistente Linearisierung ergibt sich das nicht-lineare Gleichungssystem, welches iterativ mittels dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst wird.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{IK}^e & \mathbf{L}^e \\ \mathbf{L}^{eT} & \mathbf{H}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^e \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{e,ext} - \mathbf{f}^{e,int} \\ \mathbf{h}^e \end{bmatrix} .$$

## Numerisches Beispiel

Untersucht wird die Cook's Membran für das linear-elastische ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material. In Abb. 1 ist die deformierte Konfiguration für  $F = \pm 1$  dargestellt.

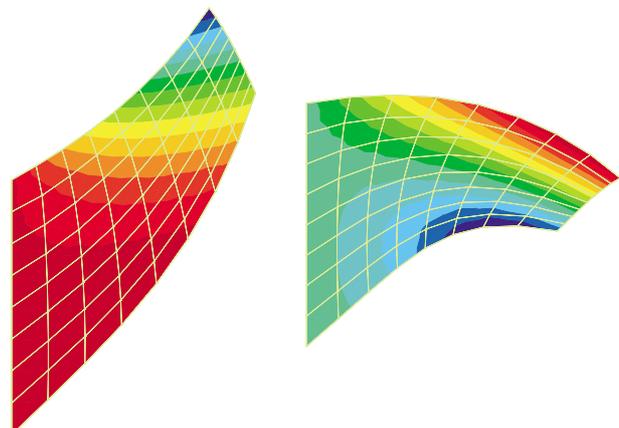
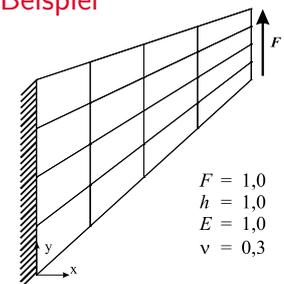


Abb. 1: deformierte Cook's Membran für  $F = \pm 1$