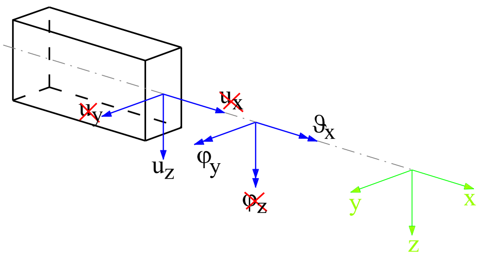
Universität Karlsruhe (TH)

Modellierung von Trägerrosten mit der Methode der Finiten Elemente

Vertieferarbeit von cand.-ing. Bernd Herz

BAUSTATIK

Definition



Unter einem Trägerrost ist ein ebenes Stabtragwerk zu verstehen, das nur senkrecht zu seiner Ebene belastet wird. Die Tragwirkung beruht auf einachsiger Biegung und Torsion. Dadurch entfallen mit $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$ und φ_z drei der sechs Freiheitsgrade.

Allgemeine Grundlagen

Durch Einführung lokal begrenzter Ansatzfunktionen entsteht aus dem Prinzip der virtuellen Verrückung (PVV) ein Verfahren der finiten Elemente. Die Ansatzfunktionen approximieren die in den Energieintegralen auftretenden unbekannten Verschiebungsgrößen.

Das PVV, ohne Berücksichtigung der Temperaturverzerrung, lautet:

$$\int_B \left[(\mathbf{D}_k \delta\mathbf{u})^T \,\mathbf{C}\, (\mathbf{D}_k \mathbf{u}) - \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathbf{p}} \,\right] dB - \int \delta\mathbf{u}_r^T \overline{\boldsymbol{\sigma}}_R \, dR = 0$$

Für ein schubweiches Stabkontinuum, bei dem die Verzerrungsgrößen nur erste Verschiebungsableitungen enthalten, muß ein zulässiger Verschiebungszustand dann stetig in den Funktionswerten (C^0-stetig) sein.

Shear-Locking

Das Trägerrost-Element wurde hier als schubweiches 2- und 3-Knoten-Element programmiert und deren Brauchbarkeit an einfachen Beispielen getestet. Wie man am unten aufgeführten Beispiel sieht, erweist sich die Finite-Element-Näherung des 2-Knoten-Elementes als sehr schlecht.

Dies ist darauf zurückzuführen, daß Schubenergie aktiviert wird, obwohl keine Querkraft in der exakten Lösung auftritt. D.h. bei reiner Biegung tritt bei der FE-Näherung ein Schubwinkel $\gamma_z \neq 0$ auf.

$$\gamma_z = \frac{du_z}{dx} + \varphi_y$$

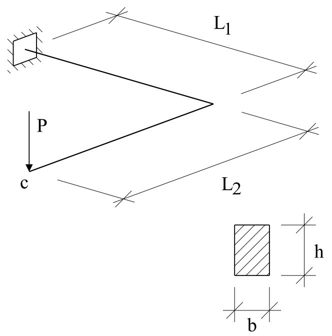
$\frac{du_z}{dx}$ ist konstant bzgl. x und φ_y ist linear in x
$\Rightarrow \quad \gamma_z \neq$ konstant falls $\varphi_y \neq$ konstant

Für das Element mit linearen Ansatzfunktionen kann der Zustand $\gamma_z =$ konstant nicht dargestellt werden, falls φ_y nicht konstant ist. Dieses Phänomen wird in der Literatur als "Locking" bezeichnet.

Selektive/ reduzierte Integration

Unter selektiver, reduzierter Integration ist zu verstehen, daß Teile der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ exakt, andere jedoch unterintegriert werden. Bei der Unterintegration wird die erforderliche Anzahl der Stützpunkte ξ_j für die numerische Integration um einen Stützpunkt reduziert. Mit der selektiven, reduzierten Integration kann die Konvergenzrate beschleunigt werden.

Numerisches Beispiel



Als Beispiel dient ein abgewinkelter Kragarm mit einer Einzellast am freien Ende. Hier treten alle für das Trägerrostelement relevanten Größen (Q_z, M_y, M_T) auf.

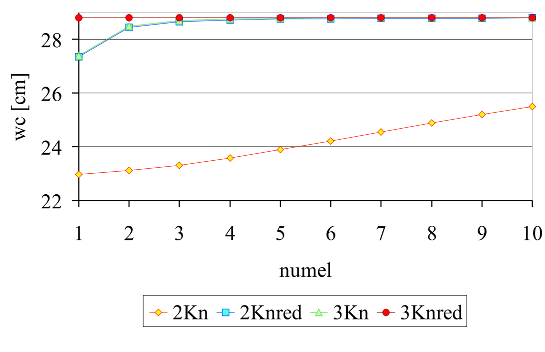
Arbeitssatz:

$$\frac{1}{2} P w_c = \frac{1}{2}\int_0^{2l} \frac{P^2}{GA_{Qz}} dx + \frac{1}{2} 2 \int_0^l \frac{P^2 x^2}{EI_y} dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2 l^2}{GI_T} dx$$

$$w_c = \int_0^{2l} \frac{P}{GA_{Qz}} dx + 2\int_0^l \frac{P x^2}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{P l^2}{GI_T} dx$$

$$= 28,818\, cm$$

Numerische Ergebnisse:



Das 2Kn-Element liefert selbst bei zehn Elementen noch kein brauchbares Ergebnis. Der Fehler liegt noch über inakzeptablen zehn Prozent. Das 2Knred- und 3Kn-Element konvergieren dagegen gut und liefern bereits bei einer Diskretisierung mit drei Elementen Ergebnisse, deren Fehler unter einem Prozent liegen. Das 3Knred-Element liefert bereits bei nur einem Element die exakte Lösung.