



Einleitung

In den letzten Jahren wurden Anstrengungen unternommen, ein Kontinuum ohne ein beschränkendes Netz, sondern nur mittels Knoten bzw. Partikel zu diskretisieren. Daraus resultieren z.B.: Von L. LUCY, R.A. GINGOLD und J.J. MONAGHAN die *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH) in den 70er. Anfang der 90er kam die *Diffuse Element Method* von NAYROLES hinzu. TED BELYTSCHKO und sein Mitarbeiter SHAOFAN LU griffen die Methode der *Moving Least Squares* (MLS) auf, deren theoretische Grundlagen auf SALKAUSKAS und LANCASTER zurückgehen (1980), und setzte sie in der *Element Free Galerkin Methode* (EFG) um (1994). Weiter sind noch die *hp-Cloud Method* von C.A. DUARTE und J.T. ODEN, die *Partition of Unity Method* (PUM) von I. BABUSKA und J.M. MELENK, und schließlich die *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) von WING KAM LIU zu nennen (1995). Letztere stellt eine Synthese und Fortentwicklung von SPH, MLS und PUM dar.

Die RKPM-Formfunktionen

Im Galerkin-Verfahren wird die Lösungsfunktion eines Problems, das in Form einer partiellen Differentialgleichung vorliegt, mit Hilfe von Formfunktionen (Interpolanten) angenähert oder diskretisiert.

$$\begin{aligned} Gu(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega_y} \mathbf{b}(\varrho, \mathbf{x}) \mathbf{P}^T \left(\frac{\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}}{\varrho} \right) u(\mathbf{y}) \Phi_\varrho(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}}) d\Omega_y \\ &= \int_{\Omega_y} \mathcal{C}(\varrho, \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{x}) u(\mathbf{y}) \Phi_\varrho(\mathbf{y}-\mathbf{x}) d\Omega_y \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt eine globale Approximationsformel für die Formfunktion $u(\mathbf{x})$ dar. Die enthaltene Formfunktion nennt LIU *reproducing kernel*:

$$\mathcal{K}_\varrho(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathcal{C}(\varrho, \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{x}) \Phi_\varrho(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

Das Galerkin-Verfahrens mit RKPM

Die Implementierung erfolgt mit Hilfe des *Prinzips der virtuellen Arbeit*. Damit lässt sich folgende Gleichung herleiten, die mit Hilfe von Rechnern gelöst werden kann:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

Dabei ist Matrix \mathbf{K} die sog. *Steifigkeitsmatrix*, \mathbf{U} die Verschiebung und Vektor \mathbf{F} der sog. *Lastvektor*.

Das Cosserat-Kontinuum

Das Cosserat-Kontinuum ist das einfachste nicht-klassische Kontinuum und wird sowohl durch Verschiebungsfreiheitsgraden als auch durch Rotationsfreiheitsgraden beschrieben.

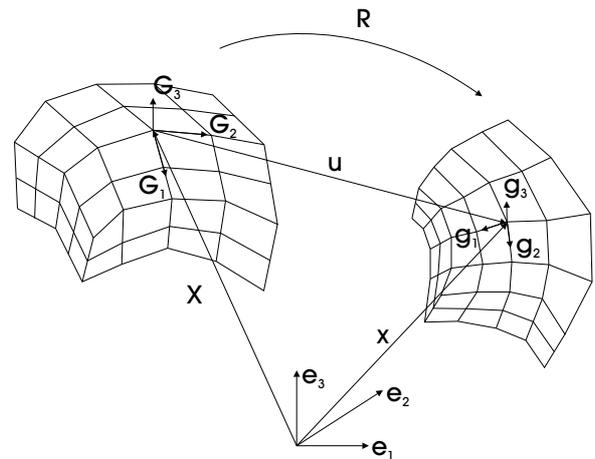


Bild 1: Kinematik des Cosserat-Kontinuums

Es gilt $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{\sin|\gamma|}{|\gamma|} \mathbf{\Gamma} + \frac{1-\cos|\gamma|}{|\gamma|^2} \mathbf{\Gamma}^2$ für den Rotati-

onstensor, wobei $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Verzerrmaße des Rotationstensors sind der erste *Cosserat-Verzerrungstensor* $\mathbf{U} := \mathbf{R}^T \mathbf{F}$ und der zweite *Cosserat-Verzerrungstensor* $\mathbf{K} := -\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{G}^i$.

Das Variationsprinzip

Das Variationsprinzip dient dazu, das Minimum eines Funktionals zu berechnen. In diesem Fall handelt es sich beim Funktional um die Energiegleichung $\delta\Psi_{int} - \mathcal{W}_{ext} = 0$.

Die 1. Variation der Energiegleichung lässt sich darstellen als:

$$\delta\Psi_{int}(\mathbf{U}, \mathbf{K}) = \int_{\mathcal{M}} [\mathbf{n} : \delta\mathbf{U} + \mathbf{m} : \delta\mathbf{K}] dA$$

Die zweite Variation:

$$\Delta\delta\Psi_{int}(\mathbf{U}, \mathbf{K}) = \int_{\mathcal{M}} [\mathbf{R}\mathbf{n} : \delta\mathbf{F} - \mathbf{R}\mathbf{n}\mathbf{F}^T : \mathbf{W} - \mathbf{m} : \mathbf{R}^T \mathbf{w}_{,i} \otimes \mathbf{e}_i] dA$$