Behandlung von Vouten bei Finite-Elemente-Untersuchungen von ebenen Stabtragwerken

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Diplomarbeit von Florian Jurecka

Stäbe veränderlichen Querschnitts

Stäbe mit linear veränderlicher Höhe werden zur besseren Materialausnutzung bei veränderlichen Schnittgrößenverläufen eingesetzt.
Die Querschnittsänderung kann bei FE-Berechnungen durch ein eigenes Element mit angepasster Steifigkeitsmatrix oder durch einen Stufenträger aus mehreren prismatischen Elementen berücksichtigt werden.

Grundlagen

Hinreichende Beschreibung der Geometrie einer Voute durch die Parameter:

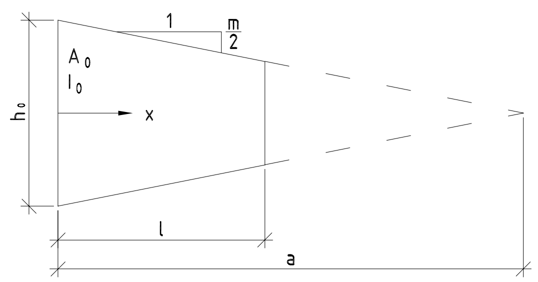

Abb. 1: Geometrie einer Voute

Folgende Parameter werden abkürzend eingeführt:

$$a = -\frac{h_0}{m} \qquad \alpha = -\frac{l}{a} \qquad \eta = (1+\beta)\ln\beta - 2\,\alpha$$

$$\beta = 1 + \alpha \qquad \mu = \frac{1}{\beta} = \frac{h_a}{h_b}$$

Programmierung eines Voutenelementes

Mit Hilfe der sich aus den exakten Formfunktionen ergebenden Steifigkeitsmatrix und dem zugehörigen Elementlastvektor für linear veränderliche Normal- und Querlast wurde für FEAP ein Voutenelement programmiert.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
EA_0\frac{\alpha}{l\ln\beta} & 0 & 0 & -EA_0\frac{\alpha}{l\ln\beta} & 0 & 0 \\
0 & EI_0\frac{\alpha^3(1+\beta)}{l^3\eta} & -EI_0\frac{\alpha^3}{l^7\eta} & 0 & -EI_0\frac{\alpha^6(1+\beta)}{l^7\eta} & -EI_0\frac{\alpha^3\beta}{l^2\eta} \\
0 & -EI_0\frac{\alpha^3}{l^2\eta} & EI_0\frac{2\beta^8\ln\beta-\alpha(7+3\alpha)}{l\eta} & 0 & EI_0\frac{\alpha^3}{l^2\eta} & -EI_0\frac{\beta\,[8\beta\ln\beta-\alpha(2+\alpha)]}{l\eta} \\
-EA_0\frac{\alpha}{l\ln\beta} & 0 & 0 & EA_0\frac{\alpha}{l\ln\beta} & 0 & 0 \\
0 & -EI_0\frac{\alpha^3(1+\beta)}{l^3\eta} & EI_0\frac{\alpha^3}{l^2\eta} & 0 & EI_0\frac{\alpha^3(1+\beta)}{l^3\eta} & EI_0\frac{\alpha^3\beta}{l^2\eta} \\
0 & -EI_3\frac{\alpha^3\beta}{l^2\eta} & -EI_0\frac{\beta\,[2\beta\ln\beta-\alpha(2+\alpha)]}{l\eta} & 0 & ED_0\frac{\alpha^3\beta}{l^2\eta} & EI_0\frac{\beta^7\,[2\ln\beta-\alpha(2-\alpha)]}{l\eta}
\end{pmatrix}$$

Vergleich mit Näherungslösungen

Diskretisierung der Voute als Stufenträger aus prismatischen Elementen mit Querschnittswerten eines Vergleichsquerschnitts (Index $_v$). Bestimmung des relativen Fehlers

$$r_{ik} = \left(1 - \frac{k_{v,ik}}{k_{ik}}\right) \cdot 100 \qquad \text{in } \%$$

in den einzelnen Steifigkeiten des „Ersatzelements“ in Abhängigkeit vom Konizitätsparameter μ.

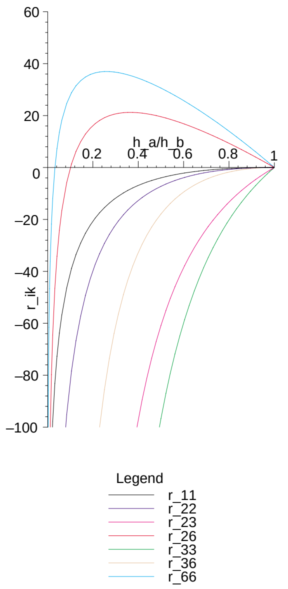

Abb. 2: Vergleichsquerschnitt durch Elementmitte

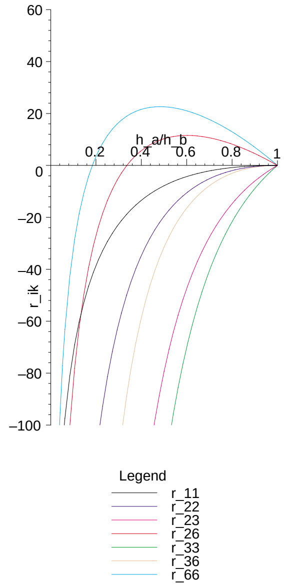

Abb. 3: Vergleichsquerschnitt durch Elementschwerpunkt

Entsprechende Fehlerdiagramme sind auch für den die Koeffizienten des Elementlastvektors verfügbar.

Empfehlungen für die Praxis

Fehler r_{ik} hängen allein von μ ab !
$\Rightarrow$ Fehler gleicher Größenordnung über die gesamte Voute sind nur durch einheitliches μ erreichbar !
Über den Träger veränderliche Elementlängen

$$l_i = \left(\frac{\sqrt[n]{\mu^{n-1}}}{\mu}\right)^{i-1} \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\sqrt[n]{\mu^{n-1}}}{\mu} - 1\right) l$$

bei n Elementen halten die relativen Fehler konstant, insgesamt wird die Qualität der Näherung optimiert. Anhand einiger Parameterstudien wurde die Effektivität dieser Forderung überprüft.