

Physikalische und materielle Kräfte

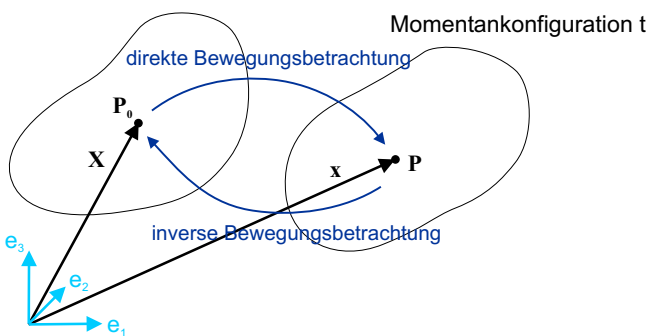
Der Begriff der *Kraft* ist ein grundlegender Terminus in der Kontinuumsmechanik. Man versteht darunter in der klassischen Newtonschen Mechanik u.a. die Reaktion eines Körpers auf eine *Deformation*. Die Kraft wird daher am deformierten Körper definiert, da ohne Deformation keine Kräfte entstünden.

Dagegen werden *materielle Kräfte* auf den undeformierten Körper bezogen. Es läßt sich zeigen, daß es sich bei den materiellen Kräften um die Reaktion des Körpers auf Oberflächenveränderungen (wie z.B. eine Rißfortplanzung) handelt.

Allgemeine Grundlagen

Grundlegend für die Herleitung der materiellen Kräfte ist die *inverse Bewegungsbetrachtung* bei der man aus der Momentankonfiguration t heraus die Referenzkonfiguration $t = t_0$ beschreibt. Bei der üblicherweise in der Mechanik verwendeten *direkten Bewegungsbetrachtung* wird von Referenzkonfiguration auf Momentankonfiguration geschlossen. Die mechanischen Gesetzmäßigkeiten lassen sich in beiden Ansätzen formulieren.

Referenzkonfiguration $t=t_0$



Beziehung der physikalischen und materiellen Größen

Beschränkt man sich auf reversible isotherme Prozesse, so ergibt sich aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik eine Beziehung zwischen dem 2. Piola Kirchhoff Spannungstensor $\mathbf{S}$ und dem materiellen Eshelby Spannungstensor $\mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma} = \psi_0 \mathbf{1} - \mathbf{CS}.$$

Analog lassen sich die physikalischen Volumenkräfte $\mathbf{b}_0^s$ in die materiellen Volumenkräfte $\mathbf{b}_0^m$ überführen

$$\mathbf{b}_0^m = -\mathbf{F}^T \mathbf{b}_0^s + \rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{F}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}.$$

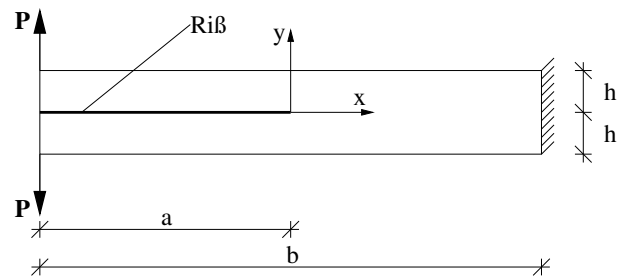
Schwache Form und FEM

Unter Zuhilfenahme der starken Form des Gleichgewichts läßt sich für den materiellen Ansatz eine Gleichung zur Berechnung des materiellen Kraftvektors finden. Beschränkt man sich auf statische Berechnungen an homogenen Körpern ohne Berücksichtigung von Volumenkräften, so erhält man aus der FE-Approximation die materielle Knotenkraft

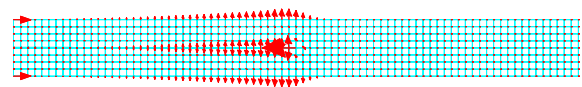
$$\mathbf{F}_{mat,n}^s \delta \hat{\mathbf{X}} = \bigcup_{e=1}^{nelem} \sum_{I=1}^{nel} \left[\int_{\mathcal{B}_0^e} (\psi_0 \mathbf{1} - \mathbf{CS}) \text{Grad } N_I dV^e \right] \delta \mathbf{X}_I.$$

Numerisches Beispiel

Materielle Kräfte treten im Bereich von Diskontuitäten (Rissen) auf und eignen sich daher als Bruchindikator. Als Beispiel dient ein Kragarm mit einem Längsriß.



Die materiellen Knotenkräfte sind um die Rißspitze konzentriert. Der größte Kraftvektor tritt exakt an der Rißspitze auf und zeigt entgegen der zu erwartenden Rißausbreitungsrichtung.



Zum Vergleich wird die Energiefreisetzungsrate $\frac{dW}{da}$ herangezogen. Sie kann nach der Balkentheorie bestimmt werden. Man erhält $\frac{dW}{da} = 6.000 \text{ e-}02 \text{ N}$.

Betrachtet man die Ergebnisse verschiedener Berechnungen mit zunehmender Netz-Verfeinerung, so nähert sich $\mathbf{F}_{mat}^s$ der analytischen Lösung an.

Netz	$F_{mat,x}^s [\text{N}]$
2x20	6.504 e-02
4x40	6.324 e-02
8x80	6.248 e-02
16x160	6.196 e-02
24x240	6.182 e-02