Universität Karlsruhe (TH)

# Berechnung der dynamischen Beanspruchung von Stabtragwerken mit der modalen Analyse

Diplomarbeit von Christoph Niklasch

BAUSTATIK

## Einführung

Neben reinen statischen Belastungen können Bauwerke auch vielfältigen dynamischen Belastungen ausgesetzt sein.
Die modale Analyse bietet die Möglichkeit, die Belastung eines Tragwerks infolge einer dynamischen Beanspruchung bei linear-elastischen Problemen zu berechnen.

## Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Das einfachste Modell eines schwingenden Systems ist der Schwinger mit einem Freiheitsgrad.

Bewegungsgleichung:

$$M \cdot \ddot{u}(t) + C \cdot \dot{u}(t) + K \cdot u(t) = P(t)$$

Ist das System ungedämpft ($C = 0$) und wird mit $P_0 \cdot \sin \omega_p t$ harmonisch fremderregt, so erhält man als Gesamtlösung der erzwungenen, harmonischen Schwingung ohne Dämpfung:

$$u = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{P_0}{K} [\frac{1}{1-\beta^2}] \cdot (\sin \omega_p t - \beta \sin \omega t)$$

## Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

Die meisten Systeme muss man als Systeme mit mehreren Freiheitsgraden modellieren.
Als Bewegungsgleichung erhält man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen.

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{C} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{P}(t)$$

## Modale Analyse

Die modale Analyse ist ein indirektes Verfahren zur Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems.Dabei wird das Differentialgleichungssystem vor der Lösung umgeformt.
Die modale Analyse basiert auf einer Eigenwertanalyse zur Bestimmung der Eigenformen.

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) \bar{\boldsymbol{u}} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = 0$$

Man erhält aus der Eigenwertanalyse die Eigenwerte $\lambda_i = \omega_i^2$ und Eigenformen $\phi_i = \frac{1}{\bar{u}_{i,max}} \bar{\boldsymbol{u}}_i$
Mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung der Eigenformen

$$\boldsymbol{\Phi}_m^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi}_n = 0; \; \boldsymbol{\Phi}_m^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_n = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

entkoppelt sich das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{P}(t)$$

und man erhält Einzelschwingungen in generalisierten Koordinaten $y_i$:

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = P_i(t)$$

Die Gesamtschwingung des Systems erhält man aus der Superposition der Einzelschwingungen:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_i \boldsymbol{u}_i(t) = \sum_i \Phi_i y_i(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}(t)$$

## Finite–Elemente–Implementierung

Implementiert wurde die modale Analyse elementunabhängig in FEAP. Die Aufstellung der Massen- und Steifigkeitsmatrizen sowie die Berechnung der Eigenwerte erfolgt mit vorhandenen Funktionen.

## Numerische Beispiele

Untersucht wird ein Rahmen mit einer Fußpunktbeschleunigung nahe seiner Eigenkreisfrequenz ($\omega_1 = 54,71 \; rad/s$). Die Abb. 1 zeigt der Verlauf der Riegelverschiebung.

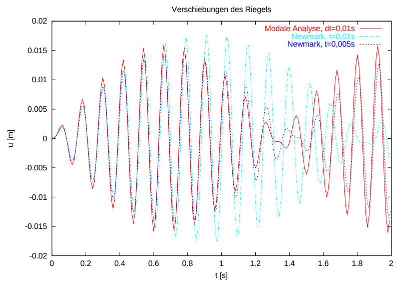


Abb. 1: Verschiebung des Riegels

In einem zweiten Besipiel wird der Verlauf der Durchbiegung des Plattenmittelpunkts einer allseitig gelenkig gelagerten Quadratplatte bei einer harmonischen Erregung gezeigt.

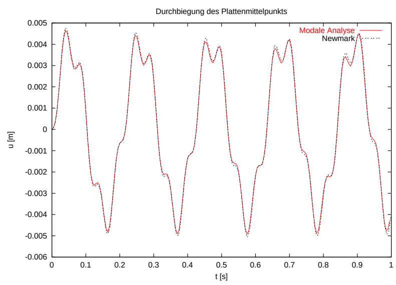


Abb. 2: Durchbiegung des Plattenmittelpunkts