Universität
Karlsruhe (TH)

Theorie und Finite-Element-Implementierung eines piezoelektrischen Schalenelementes

Diplomarbeit von Serdar Usanmaz

BAUSTATIK

Allgemeine Grundlagen

Der Effekt der Piezoelektrizität beschreibt das Zusammenspiel von mechanischer und elektrischer Spannung in Festkörpern. Man unterscheidet je nach der Richtung der Energiewandlung zwischen dem direkten und dem inversen piezoelektrischen Effekt. Der direkte piezoelektrische Effekt bewirkt, dass die Piezokeramiken bei einer mechanischen Verformung oder Belastung elektrische Ladung freisetzen. Beim inversen piezoelektrischen Effekt kommt es durch Anlegen einer elektrischen Spannung zu einer Dimensionsänderung. Durch Nutzung dieser zwei Effekte werden piezokeramische Werkstoffe als aktive Bauteile, wie Sensoren und Aktoren eingesetzt.

Materialmodell

Das elektromechanische Materialverhalten wird durch die linearen konstitutiven Gleicungen beschrieben:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} \\ -\vec{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\boldsymbol{e}^T \\ -\boldsymbol{e} & -\boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{bmatrix} \quad .$$

Die konstante Elastizitätsmatrix $\mathbb{C}$ beschreibt das linear-elastische Materialverhalten. Die Materialparameter $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ sind die piezoelektrischen und dielektrischen Materialkonstanten.

Die gekoppelte Variationsformulierung

Den Ausgangspunkt für die Variationsformulierung bildet das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu. Dieses stellt die allgemeine Form des Dreifeldfunktionals dar. Es werden drei unabhängige Felder eingesetzt: Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen.

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad &= \int\limits_{(\Omega)} [W_{0S}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_G(\underline{\boldsymbol{v}}) - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})] \mathrm{d}A \\ &- \int\limits_{(\Omega)} \underline{\boldsymbol{u}}^T \overline{\underline{\boldsymbol{p}}} \, \mathrm{d}A - \int\limits_{(\Gamma_\sigma)} \underline{\boldsymbol{u}}^T \overline{\underline{\boldsymbol{t}}} \, \mathrm{d}s \quad \rightarrow \text{stat.} \end{aligned}$$

mit

$$\underline{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \widehat{\varphi} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\vec{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \vec{\boldsymbol{E}} \end{bmatrix} .$$

Zusätzlich zu den sechs mechanischen Freiheitsgraden werden zwei elektrische Freiheitsgrade mit $\widehat{\varphi}$ eingeführt. Mit der Lösung dieses gekoppelten Variationsproblems werden die inneren Arbeiten von elektromechanischen Systemen vollständig berücksichtigt, sodass reale Strukturverhalten besser approximiert werden.

FEM-Formulierung

Für die elektrischen Feldgrößen werden dieselben bilinearen Ansatzfunktionen verwendet, wie bei den mechanischen Feldgrößen. Die virtuelle Approximation des Gradientenfeldes lautet:

$$\delta \vec{\boldsymbol{E}}^h = -\sum_{I=1}^{4} \begin{bmatrix} \xi^3 N_{I,x} & 0 \\ \xi^3 N_{I,y} & 0 \\ N_I & \xi^3 N_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\Delta\varphi \\ \delta\Delta\varphi_b \end{bmatrix}_I \quad .$$

Die Ableitung der bilinearen Ansatzfunktionen nach den kartesischen Koordinaten wird durch die Anwendung der Jacobi-Matrix erreicht. Die Approximation der schwachen Form der gekoppelten Variationsformulierung summiert über alle Elemente lautet:

$$\sum_{e=1}^{nelem} \delta\Pi_e^h \quad = \delta \underline{\boldsymbol{V}}^T [\underline{\boldsymbol{K}}_T \Delta \underline{\boldsymbol{V}} + \widehat{\underline{\boldsymbol{F}}}\,] \; = 0$$

$$\text{mit} \qquad \underline{\boldsymbol{K}}_T = \bigcup_{e=1}^{nelem} \underline{\boldsymbol{k}}_T^e \quad \text{und} \quad \widehat{\underline{\boldsymbol{F}}} = \bigcup_{e=1}^{nelem} \widehat{\underline{\boldsymbol{f}}} \quad .$$

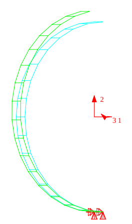
Hierin stellt $\underline{\boldsymbol{K}}_T$ die Steifigkeitsmatrix der gesamten Struktur und $\widehat{\underline{\boldsymbol{F}}}$ den globalen Lastvektor nach der Assemblierung dar. Die Größen $\underline{\boldsymbol{k}}_T^e$ und $\widehat{\underline{\boldsymbol{f}}}$ sind die entsprechenden Elementmatrizen und -lastvektoren.
Hieraus folgt das lineare Gleichungssystem:

$$\Delta \underline{\boldsymbol{V}} = -\underline{\boldsymbol{K}}_T^{-1} \, \widehat{\underline{\boldsymbol{F}}} \quad .$$

Diese ermöglicht die Ermittlung der Knotenverschiebungen $\Delta \boldsymbol{u}_K$, der Knotenverdrehungen $\Delta \boldsymbol{\beta}_K$ und der Knotenwerte für das elektrische Potenzial $\widehat{\varphi}_K$.

Nummerische Beispiele

Die Bogenschale wird unter sensorischem Betrieb betrachtet. Dabei wird am oberen Ende mit einem konstanten Moment in Dickenrichtung belastet.



Durch Aufbringen der mechanischen Belastung, baut sich beim direkten piezoelektrischen Effekt ein elektrisches Feld auf. Der Vergleich der Ergebnisse mit dem Acht-Knoten-Volumenelement „Solid shell“ lieferte eine gute Übereinstimmung..

	u_y [m]	$\vec{E}_3$
Hybrid shell	$3.53993 \cdot 10^{-4}$	$2.77000 \cdot 10^{-4}$
Solid shell	$3.55437 \cdot 10^{-4}$	$2.75998 \cdot 10^{-4}$