Theorie und Finite-Element-Formulierung eines piezoelektrischen Kontinuums

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Diplomarbeit von Simon Vetter

Einleitung

Zur passiven als auch aktiven Verformungskontrolle von mechanischen Strukturen finden piezoelektrische Materialien in der Industrie zahlreiche Anwendungen. So lässt sich z.B. der Reflektor eines Weltraumteleskops mit Hilfe dieser Materialien feinpositionieren.

Der piezoelektrische Effekt wird durch die Kopplung zwischen elektrischen und mechanischen Feldern verursacht. So können piezoelektrische Materialien durch elektrische Potentialunterschiede mechanisch bewegt werden. Umgekehrt erzeugen mechanische Deformationen ein elektrisches Potentialfeld.

Konstitutive Beziehung

Die elektromechanische Kopplung läßt sich durch lineare konstitutive Grundgleichungen annähern. Die mechanischen Spannungen $\mathbf{T}$ bzw. die dielektrische Verschiebungsdichte $\mathbf{D}$ werden mit den mechanischen Verzerrungen $\mathbf{S}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ verknüpft

$$\begin{aligned} T_p &= c_{pq}S_q - e_{pk}E_k \\ D_i &= e_{iq}S_q + \epsilon_{ik}E_k \quad . \end{aligned}$$

Die Finite Elemente Formulierung

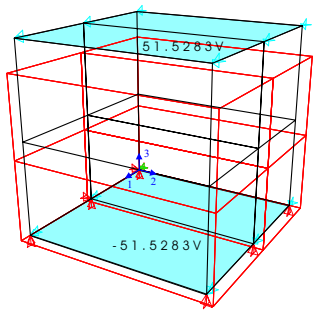
Ausgehend von diesen Grundgleichungen kann nun eine Finite Elemente Formulierung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}$$

erarbeitet werden. Durch die elektromechanische Kopplung wird das elektrische Potential ϕ als weiterer Freiheitsgrad eingeführt, wodurch die Gesamtsteifigkeitmatrix $\mathbf{K}$ um Elemente erweitert wird. Als neue äußere Belastung wird die elektrische Ladung $\mathbf{Q}$ definiert.

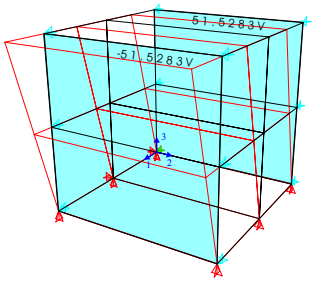
Numerische Tests

Bei diesem Versuch wird an der Unter- und Oberseite des Probekörpers ein elektrisches Potential angelegt.



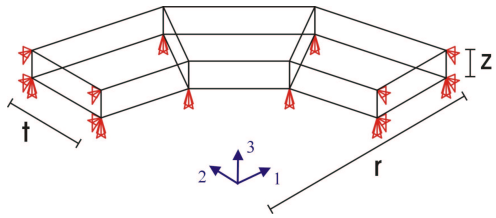
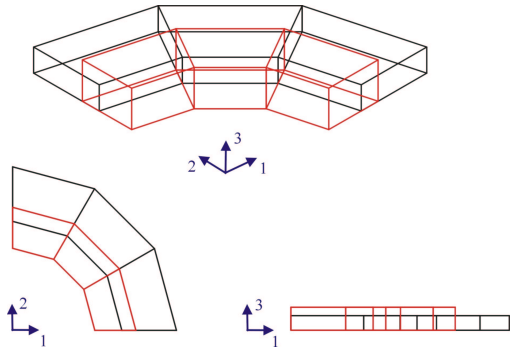
Die Verkürzung des Würfels in 3-Richtung wird als „Longitudinaleffekt“ bezeichnet. Die damit verbundenen orthogonalen Längenänderungen stellen den „Transversaleffekt“ dar.

Bei einem weiteren Versuch wird an zwei parallel zueinander liegenden Seitenflächen ein elektrisches Potential angelegt.



Dieser Versuch gibt den „Schereffekt“des Materials wieder, der die transversal isotrope Eigenschaft aufgrund der Polarisation verdeutlicht.

Im nächsten Test wird ein Ring betrachtet. Aus Symmetriegründen ist es ausreichend nur ein Viertel davon zu modellieren.



Aufgrund des elektrischen Potentialunterschiedes zwischen Unter- und Oberseite des Ringes kommt es zu einer Verkleinerung des Durchmessers, was wiederum mit einer Dickenänderung senkrecht dazu verbunden ist.