

Einleitung

Bei dünnwandigen Stabstrukturen kann es häufig von Interesse sein, bestimmte Bereiche, wie z.B. Ecken genauer zu untersuchen. Somit ergeben sich unterschiedliche Modellierungsstufen im Rahmen der FEM mit Stab- und Schalenelementen. Für die Übergänge sind geeignete Modellierungen zur Verfügung zu stellen. Dies ist oft – insbesondere bei kommerziell verfügbaren Programmsystemen – nicht der Fall. Es treten lokal Störungen im Spannungszustand auf, die im materiell nichtlinearen Fall die Ergebnisse erheblich verfälschen können. Nachfolgend wird daher eine Übergangsformulierung abgeleitet, welche einen möglichst geringen Zwang auf das untersuchte System ausübt.

Übergangselement

Zunächst werden für den Übergang die folgenden Annahmen getroffen:

- der Übergangsquerschnitt bleibt eben
- anzuschließende Knoten liegen in dieser Ebene
- alle Knoten bewegen sich auf Geraden durch S
($\sigma_y = \sigma_z \approx 0 \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$)

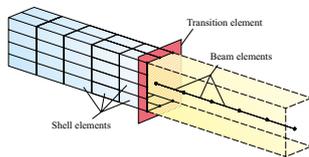


Abb. 1: Beispiel: Übergang bei einem U-förmigen Stab

Punkte des Querschnitts können mit einem konvektiven Koordinatensystem ξ_2, ξ_3 und den Basisvektoren $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ im unverformten und $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ im verformten Zustand beschrieben werden. Es werden die orthonormalen Basissysteme

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_0 \mathbf{e}_i = (\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i = (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{R} \mathbf{R}_0 \mathbf{e}_i$$

verwendet. Ein beliebiger Punkt I des Querschnitts ist wie folgt definiert

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_0 + \xi_2 \mathbf{A}_2 + \xi_3 \mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_0 + \lambda (\xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3) \quad \lambda \in \mathcal{R}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Nebenbedingung

$$\mathbf{f} = \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0 - \lambda (\xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3) = \mathbf{0}.$$

Jeder Knoten ' I ' der Schalendiskretisierung ist mit dem Referenzknoten ' 0 ' des Stabes zu verbinden. Dies kann im Rahmen der Penalty Methode – oder robuster – im Rahmen der Augmented Lagrange Methode erfolgen.

Mit den Knotenverschiebungen \mathbf{u} und den Rotationsfreiwerten ω folgen für den Elementverschiebungsvektor $\mathbf{v}^{(e)} = [\mathbf{u}_I; \omega_I; \mathbf{u}_0; \omega_0]^{(eT)}$ das Residuum

$$\mathbf{G}^{(e)} = \mathbf{B}_f^T \tilde{\Lambda}$$

mit $\mathbf{B}_f = [\mathbf{A}; \mathbf{0}; -\mathbf{A}; -\lambda \mathbf{W}]$ $\tilde{\mathbf{g}} \tilde{\Lambda} = \alpha \mathbf{f} + \Lambda$

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} - \mathbf{r}_I \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{r}_I = \xi_2 \mathbf{a}_2 + \xi_3 \mathbf{a}_3$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_0\|} \frac{1}{\|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_0\|} \quad \mathbf{W} = -\text{skew } \mathbf{r}_I$$

sowie die tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_T^{(e)} = \mathbf{B}_f^T \alpha \mathbf{B}_f + \mathbf{k}_{TG}^{(e)}.$$

Beispiel 1 Zugstab

In diesem Beispiel wird der Einfluss des Übergangselementes auf den Spannungsverlauf demonstriert. Im Fall einer starren Verbindung treten Störungen der Querspannungen σ_{22} von mehr als 20 % der Längsspannungen σ_{11} auf.

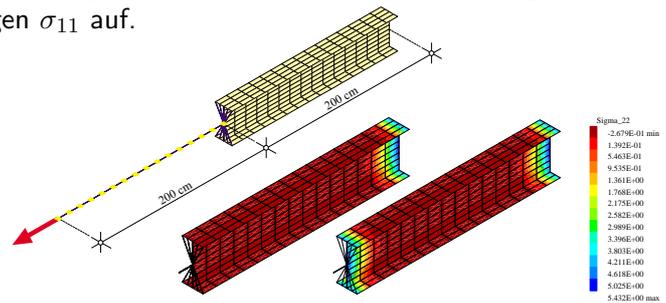


Abb. 3: Störung der Querspannungen an einem Zugstab

Beispiel 2 Stahlrahmenecke

Im zweiten Beispiel wird die kombinierte Anwendung von Stab- und Schalenelementen bei Rahmentragwerken demonstriert. Abb. 5 ist zu entnehmen, dass an den Übergängen nahezu keine Störungen des Spannungszustands auftreten.

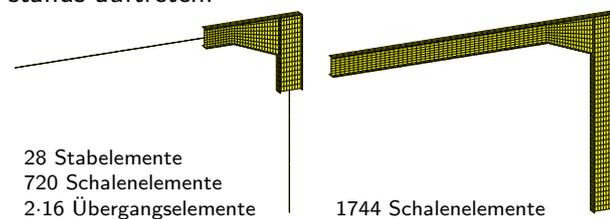


Abb. 4: FE-Modellierungsvarianten

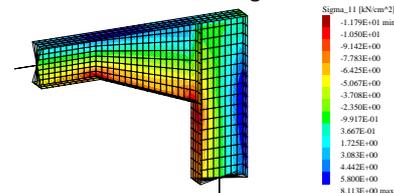


Abb. 5: Normalspannungen Stab-Schale-Modell