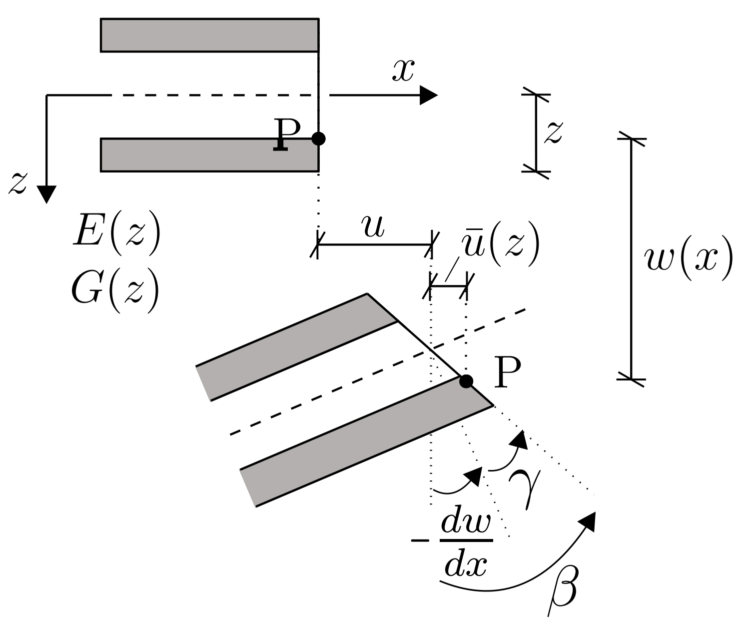
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Theorie und FE-Modellierung eines geschichteten 2D-Timoshenko-Balkenelementes

Malwine Bahlcke

1. Motivation und Ziel



Verbundwerkstoffe werden im Bauwesen häufig eingesetzt, da die zielgerichtete Kombination von Materialien oft bessere Eigenschaften mit sich bringt als die Summe ihrer Einzelkomponenten. Ziel der Arbeit ist es, im Rahmen eines Timoshenko-Balkenelementes eine Schichtung mit variierenden Materialeigenschaften und Querschnittsbreiten zu berücksichtigen.

2. Verbundtheorie

Bei einem inhomogenen Balkenquerschnitt sind die unterschiedlichen Materialparameter in der Stoffmatrix zusammengefasst.

$$\boldsymbol{D} = \int_A \begin{bmatrix} E(z) & E(z)\,z & 0 \\ E(z)\,z & E(z)\,z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa G(z) \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} D_n & D_{nb} & 0 \\ D_{nb} & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix}$$

Die Normalspannung kann in Abhängigkeit der Schnittgrößen, welche durch die Methode der Finiten Elemente bestimmt werden, folgendermaßen ermittelt werden:

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{detD}\left(D_b N - D_{nb} M - D_{nb} N z + D_n M z\right) \,,$$

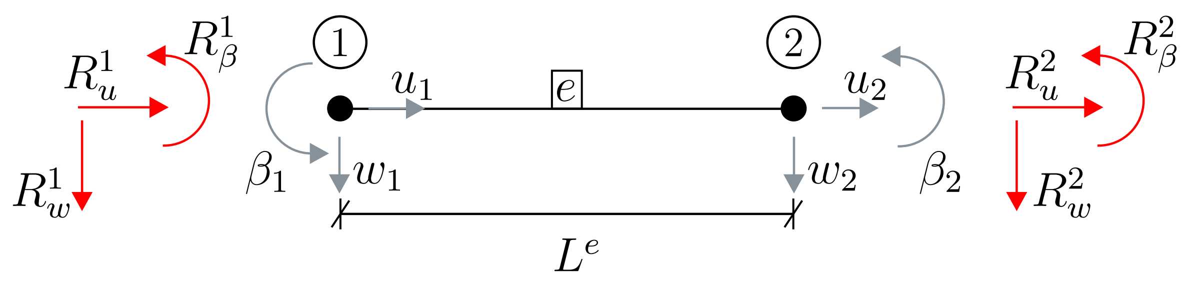
mit $detD = D_n D_b - D_{nb}^2$. Infolge der abrupten Änderung des E-Moduls an den Schichtgrenzen entstehen an diesen im linearen Normalspannungsverlauf Sprünge und Knicke. Die Formel für die Schubspannung ergibt sich aus Gleichgewichtsbeziehungen.

$$\tau(z) = \frac{Q D_{nb}}{detD\, b(z)} \int_{-h_0}^{z} E(\hat{z}) b(\hat{z}) d\hat{z} - \frac{Q D_n}{detD\, b(z)} \int_{-h_0}^{z} E(\hat{z}) b(\hat{z}) \hat{z} d\hat{z}$$

Der quadratische Schubspannungsverlauf weist an den Schichtgrenzen Neigungsänderungen durch unterschiedliche Schubmoduln und Sprünge durch Breitenänderungen auf. Der Schubkorrekturfaktor κ kann in Abhängigkeit der Schubspannung ermittelt werden, indem die Äquivalenz der Arbeiten eingefordert wird.

$$\Pi_{Qs} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\kappa D_s} \stackrel{!}{=} \int_A \frac{1}{2}\frac{\tau(z)^2}{G(z)} = \Pi_\tau$$

3. FE-Formulierung



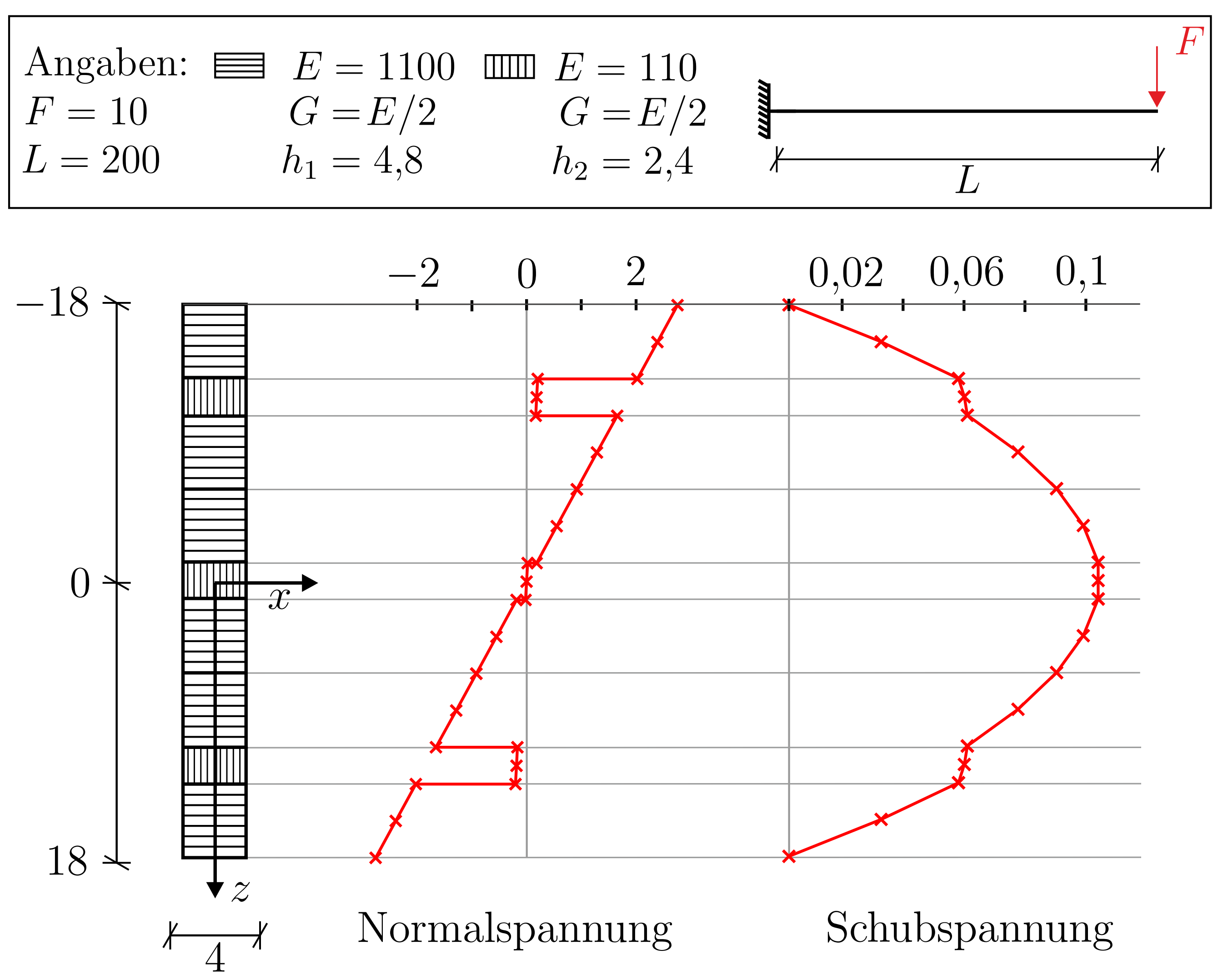
Die Methode der Finiten Elemente beruht auf der Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückung. Die Diskretisierung der inneren virtuellen Arbeit auf Elementebene mit Berücksichtigung der Stoffmatrix führt dabei auf die Steifigkeitsmatrix und die der äußeren auf den Lastvektor.

$$\delta \boldsymbol{v}^{eT} \left(\boldsymbol{K}^e\, \boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{P}^e - \boldsymbol{R}^e\right) = 0$$

Durch Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems auf Elementebene ergeben sich die gesuchten Knotenfreiwerte. Mit diesen können lokal die Schnittgrößen und Spannungen rückgerechnet werden.

4. Numerisches Beispiel

Im Beispiel werden infolge einer Einzellast die Spannungen eines Brettschichtholzkragarms untersucht.



Durch die unterschiedlichen Elastizitätsmoduln der Schichten entstehen im Normalspannungsverlauf Knicke und Sprünge und im Schubspannungsverlauf durch unterschiedliche Schubmodule Neigungsänderungen. Der Schubkorrekturfaktor ist $\kappa = 0{,}362$. Bei einem homogenen Rechteckquerschnitt wäre $\kappa = \frac{5}{6} = 0{,}833$.