Karlsruher Institut für Technologie

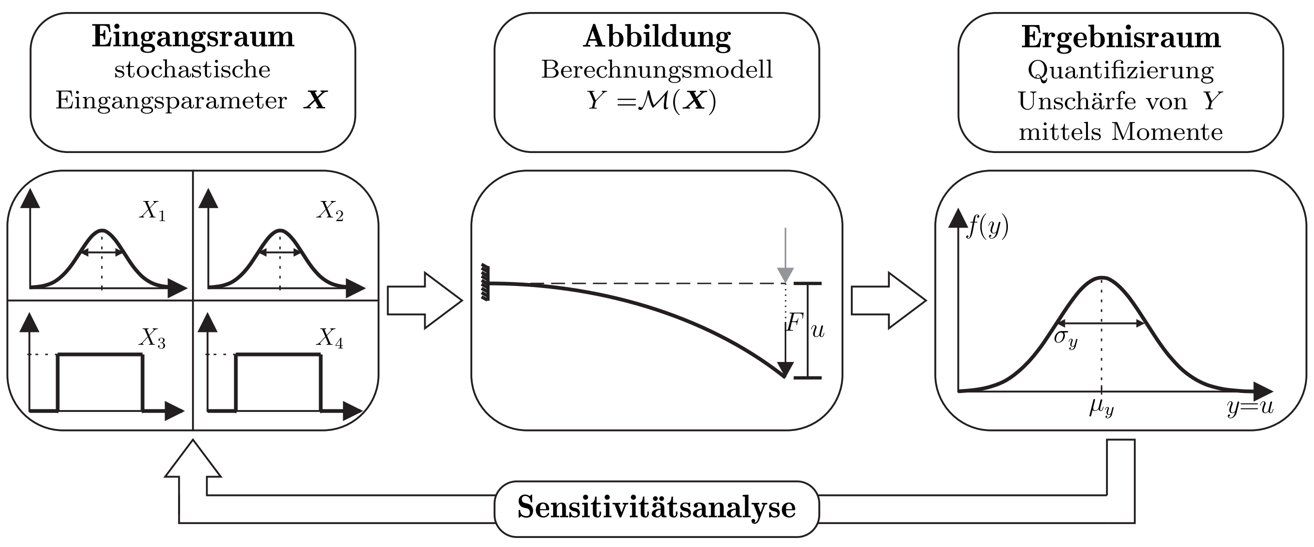
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Zweistufige polynomielle Chaosentwicklung zur Quantifizierung von Unschärfen in der Tragwerksanalyse

Julian Pappenberger

1. Einführung

Werkstoffeigenschaften und Lasten besitzen oft keine deterministischen Werte, sondern variieren. Sie werden mittels Zufallsvariablen beschrieben und sind Eingangsgrößen von Berechnungsmodellen in der Baustatik, weshalb auch die daraus ermittelten Ausgangsgrößen wie beispielsweise Verschiebungen streuen – also ebenfalls zufällig sind.



Die Unschärfe solcher Ausgangsgrößen kann mit Hilfe von statistischen Momenten quantifiziert werden. Zusätzlich kann mittels einer globalen Sensitivitätsanalyse der Einfluss der Eingangsvariablen auf die Unschärfe der Ausgangsgröße bestimmt werden. Die Monte-Carlo-Simulation (MCS) ist dabei eine gängige Methode, jedoch besitzt sie einen hohen Rechenaufwand. Eine zweistufige polynomielle Chaosentwicklung (PCE) kann diesen Rechenaufwand deutlich reduzieren.

2. Zweistufige polynomielle Chaosentwicklung

Eine zweistufige PCE kann ein vektorwertiges Berechnungsmodell $\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{X})$ mit hochdimensionalem Ausgang approximieren, welches sowohl von zufallsverteilten Eingangsvariablen $\boldsymbol{\xi}$ als auch von einem Ortsvektor $\boldsymbol{X}$ abhängt. Dafür wird eine Reihenentwicklung aus Koeffizienten $a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}}$ und multivariaten orthonormalen Basispolynomen $\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$ und $\Phi_{\gamma}(\boldsymbol{X})$ verwendet. Dabei sind $\boldsymbol{\alpha}$ und γ Multiindizes.

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{X}) \cong \sum_{\gamma} \sum_{\boldsymbol{\alpha}} a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{X})$$

Die Koeffizienten werden dabei mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, wobei zwei PCEs durchgeführt werden.

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{X}) \cong \sum_{\gamma \in \mathcal{A}^{d,p_C}} c_{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{X}), \qquad c_{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \cong \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^{M,p}} a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$$

Die Approximation von Berechnungsmodellen mittels einer zweistufigen PCE bietet im Postprocessing einen großen Vorteil, da alleine aus den bereits berechneten Koeffizienten $a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}}$ und den ortsabhängigen Basistermen $\Phi_{\gamma}(\boldsymbol{X})$ die statistischen Momente und Sobol' Indizes über den Ort hinweg berechnet werden können.

3. Postprocessing

Durch die Verwendung orthonormaler Polynome vereinfacht sich die Berechnung von Mittelwert und Kovarianz stark.

$$\mu_{\hat{Y}} = \mathbb{E}\left[\sum_{\gamma} \sum_{\boldsymbol{\alpha}} a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{x})\right] = \sum_{\gamma} a_{\gamma 0} \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{x})$$

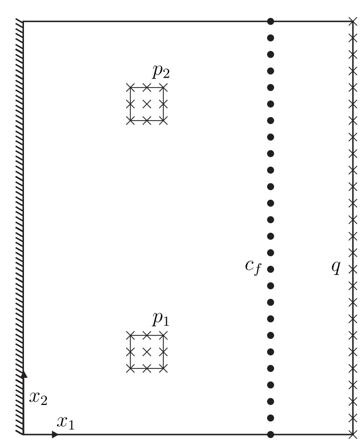
$$C_{\hat{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'} C_c^{\gamma\gamma'} \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{x}) \Phi_{\gamma'}(\boldsymbol{x}'), \qquad C_c^{\gamma\gamma'} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A} \\ \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}}} a_{\gamma\boldsymbol{\alpha}} a_{\gamma'\boldsymbol{\alpha}}$$

Ein Sobol' Index ist der Anteil der aus einer Eingangsvariablen resultierenden Teilvarianz an der Gesamtvarianz der Ausgangsgröße.

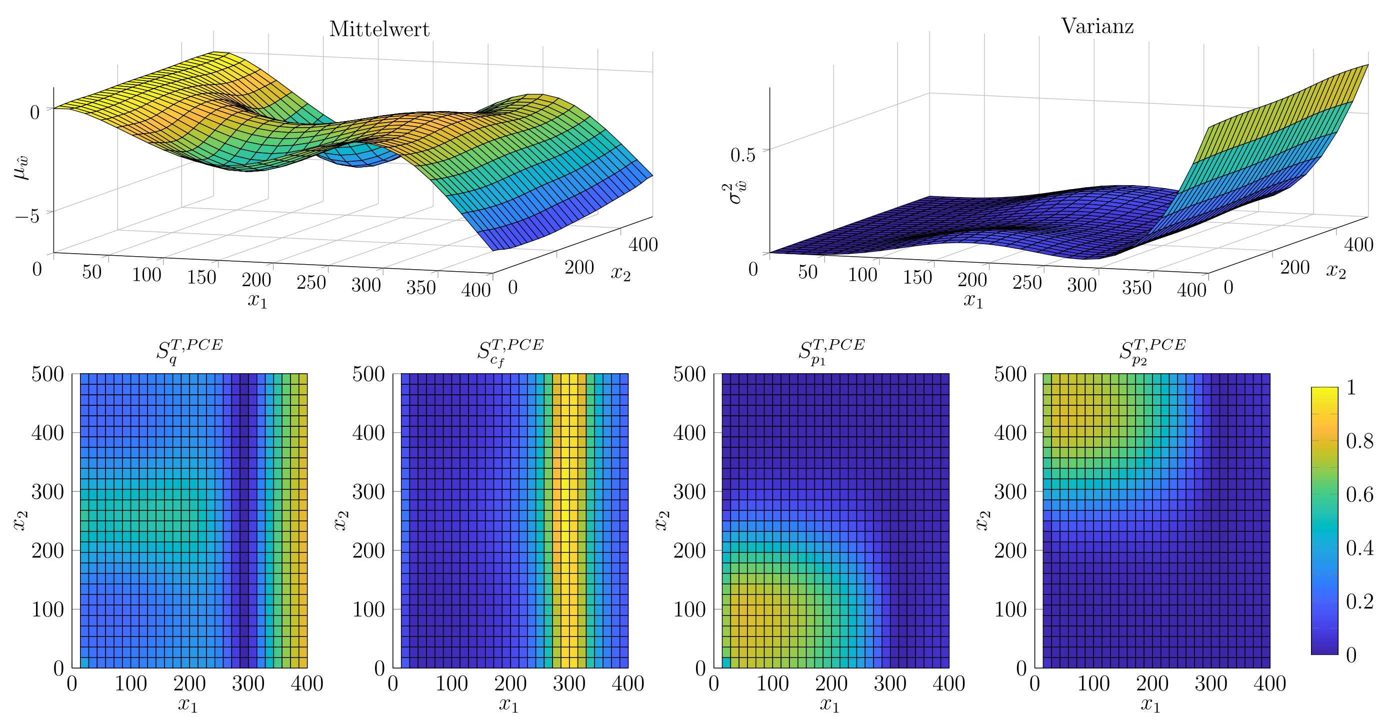
$$S^{PCE}_{i_1,\dots,i_s}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_{\hat{Y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'} C^{\gamma\gamma'}_{c\{i_1,\dots,i_s\}} \Phi_{\gamma}(\boldsymbol{x}) \Phi_{\gamma'}(\boldsymbol{x})$$

Somit sind die statistischen Momente und Sobol' Indizes vom Ort abhängige Funktionen.

4. Numerisches Beispiel



Betrachtet wird die Durchbiegung einer eingespannten Platte, die zusätzlich auf einer Streckenfeder mit der Federkonstante c_f gelagert ist. Belastet wird die Platte durch eine Streckenlast q am freien Ende und zwei lokale Flächenlasten p_1 und p_2. Diese vier Parameter werden als Zufallsvariablen modelliert. Die Stichprobengröße beträgt $n_{PCE} = 50$. Die 841 FE-Knoten werden mit der ersten PCE auf 96 Koeffizienten komprimiert, was den Rechenaufwand deutlich reduziert. Im Postprocessing der zweistufigen PCE ergeben sich die folgenden Ergebnisse.



Um entsprechende Bilder mittels einer MCS zu erhalten wurde eine Stichprobengröße von $n_{MCS} = 1000$ verwendet.