Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Momentenspannung in höherer Elastizitätstheorie-Variationsformulierung, Spannungsanalyse und analytische Beispiele

Bekir Belek

1. Einleitung

Das vollständige Beschreiben von Effekten auf Körpern infolge von Belastungen, ist ein wichtiges Ziel in der Ingenieurswissenschaft. Die lineare Elastizitätstheorie ist eine gute Näherung aber nicht exakt. Bei der Aufstellung des Gleichgewichts der Drehimpulse werden Eigendrehimpulse sowie eingeprägte Drehmomente vernachlässigt. Durch die Einführung von Momentenspannungen, sogenannte Oberflächendrehmomente, kann man diese Effekte im Modell einführen.

2. Momentenspannungentheorie

Schon 1887 forderte Voigt die Einführung von Momentenspannungen (Oberflächendrehmomente) als weiteres Maß der Verformungen, die jedoch erst 1909 durch die Gebrüder Cosserat entwickelt wurde. Dabei wurde neben dem bekannten Spannungstensor σ ein zusätzlicher Momentenspannungentensor $\mathbf{m}$ eingeführt. Dieser hat analoge Bedeutung wie der Spannungstensor. So wie der Spannungstensor die freigeschnittenen Spannungen an einem Körper beschreibt, so beschreibt der Momentenspannungentensor die Mometenspannungen. Somit hängt der Momentenspannungentensor $\mathbf{m}$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ entsprechend dem Cauchy-Theorem für den Spannungsvektor, wie folgt zusammen:

$$\vec{t} = \sigma\,\vec{n},$$

$$\vec{m} = \mathbf{m}\,\vec{n}$$

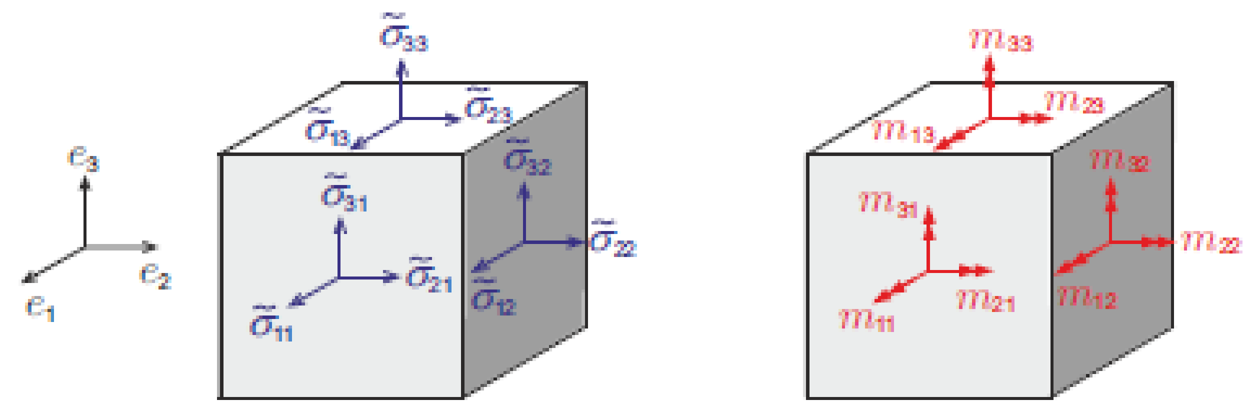

Abb.: Cauchywürfel mit Spannungen (links) und Momentenspannungen (rechts)

3. Momentenspannung

Die Spannungsfunktion kann mit Hilfe der Taylor-Reihe approximiert und analysiert werden. Wird die Drehimpulsbilanz dieser Spannungsfunktion aufgestellt, so erkennt man, dass einige Terme der Taylor-Reihe keinen Einfluss und wiederum andere Terme Einfluss auf das Gleichgewicht der Drehimpulsbilanz haben. In einer Veröffentlichung von Münch, Neff, Madeo und Ghiba führt eine mathematische Analyse auf folgende Form für die Momentenspannung:

$$\mathbf{m} = \frac{dx^2}{12}\begin{pmatrix} \sigma_{31,2}-\sigma_{21,3} & -\sigma_{22,3} & \sigma_{33,2} \\ \sigma_{11,3} & \sigma_{12,3}-\sigma_{32,1} & -\sigma_{33,1} \\ -\sigma_{11,2} & \sigma_{22,1} & \sigma_{23,1}-\sigma_{13,2} \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zur Variationsformulierung ist der Momentenspannungentensor ausschließlich aus Ableitungen der Spannung σ bestimmt. Es treten keine konstitutiven Parameter darin auf, weshalb man aus analytischen Bespielen Rückschlüsse ziehen kann.

4. Beispiel: Torsion an einem zylindrischen Stab

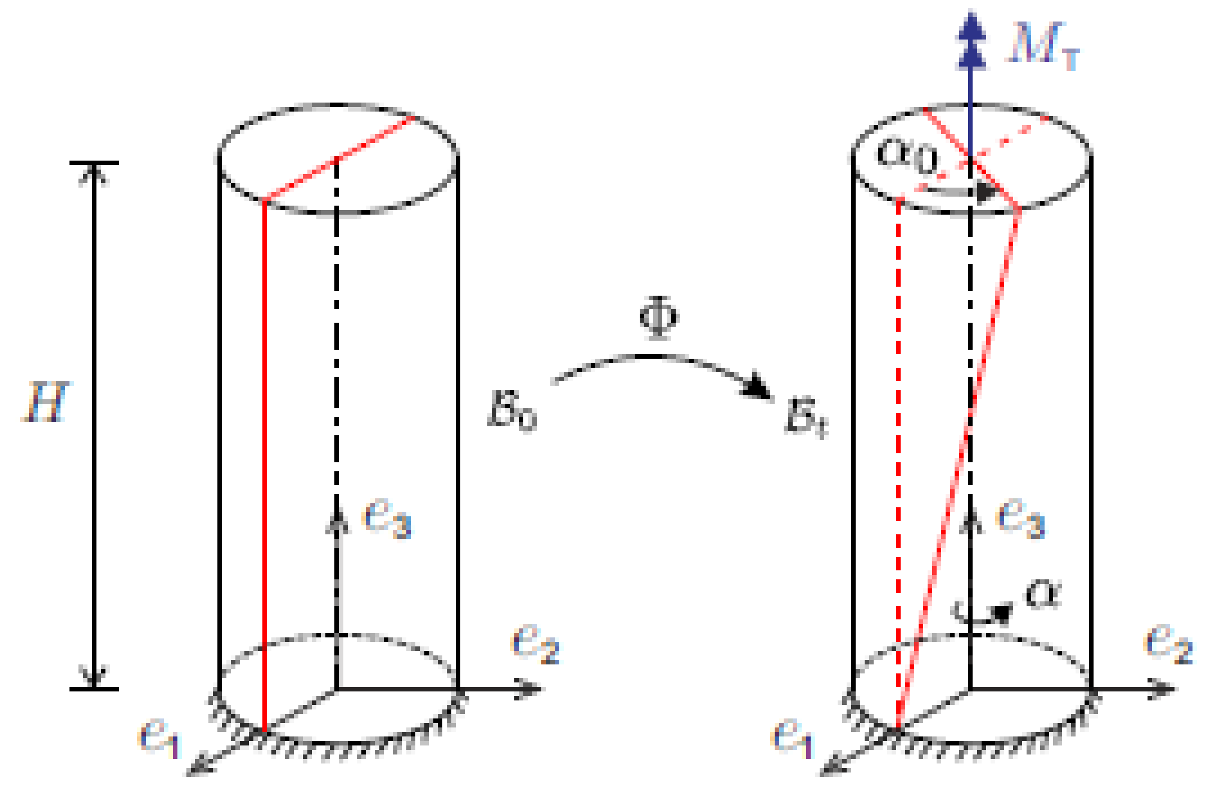

Abb.: Referenz- (links) und Momentankonfiguration (rechts) bei Torsion

Gegeben sei ein einseitig eingespannter zylindrischer Stab. Die Stabachse verläuft auf der z-Achse und der Verschiebungsvektor infolge von Torsion für $\alpha(z) \ll 1$ sei gegeben mit

$$\vec{u}^{lin} = \begin{pmatrix} -\alpha(z)yz \\ \alpha(z)xz \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha(z) = \frac{\alpha_0}{H}z$$

wobei $\alpha(z)$ der Verdrehwinkel pro Längeneinheit ist. Mit der Verschiebung werden zunächst der Verschiebungsgradient $\boldsymbol{H} = \operatorname{Grad}(\vec{u}^{lin})$ und die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym}(\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$ für infinitesimale Verzerrungen berechnet um anschließend mit Hilfe des isotropen Elastizitätsgesetzes die Spannungen $\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ zu bestimmen. Somit ergibt sich für die Momentenspannung:

$$\mathbf{m} = \frac{dx^2}{12}\begin{pmatrix} -\alpha(z)\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(z)\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha(z)\mu \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass die Momentenspannung spurfrei und symmetrisch für torsionsartige Belastung ist.