Karlsruher Institut für Technologie

BAUSTATIK

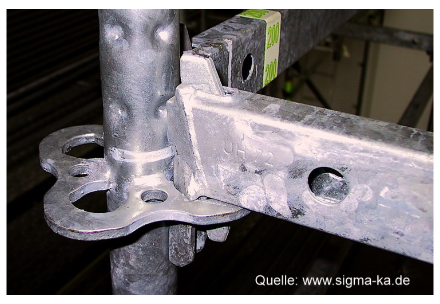
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

# Modellierung nichtlinear elastischer Einspannungen für die FE-Analyse von Gerüstsystemen

Cosima Kaiser

## 1. Motivation aus der Gerüstbaupraxis

Zur Festlegung bemessungsrelevanter statischer Eigenschaften von Gerüstsystemen können versuchstechnische Untersuchungen durchgeführt werden. An den Gerüstknoten führt dies in vielen Fällen auf nichtlinear elastische Zusammenhänge zwischen den Kraft- und Verschiebungsgrößen an den Verbindungsstellen. Sie werden in den bauaufsichtlichen Zulassungen in der Form




$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M}{A - B \cdot M} \qquad \text{für } M < M_{max}\text{, analog für } Q \text{ und } N$$

angegebenen. Durch die Einbeziehung der dadurch definierten, nichtlinear elastischen Materialgesetze in die Berechnungsabläufe der Finite-Elemente-Methode (FEM) kann das Tragwerksverhalten eines Gerüstsystems unter Berücksichtigung dieser materiellen Nichtlinearitäten modelliert und berechnet werden.

## 2. Finite Elemente für die Gerüstmodellierung

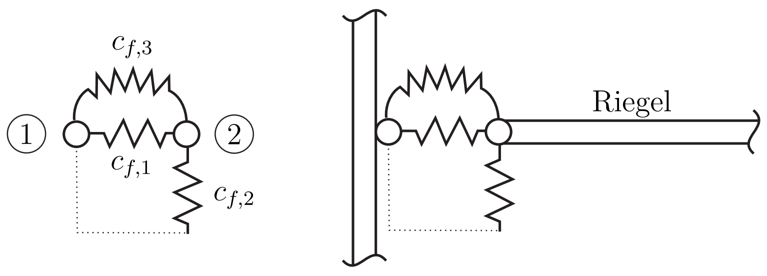
Die FE-Modellierung der Riegel und Stiele eines Gerüstsystems erfolgt durch finite Bernoulli-Balkenelemente. Die schwache Form der Gleichgewichtsbeziehung für den Biegeanteil im zweidimensionalen Fall wird durch das Prinzip der virtuellen Verschiebung formuliert:

$$\int_x EI\, w''\, \delta w''\, dx - \int_x q\, \delta w\, dx = 0 \quad .$$

Mit Kinematik, Gleichgewicht und Stoffgesetz, sowie den Hermite-Formfunktionen für $w$, erhält man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen des finiten Bernoulli-Balkenelements:

$$\delta v^{eT} \underbrace{\int_x \boldsymbol{B}^T EI\, \boldsymbol{B}\, dx}_{\boldsymbol{K}^e}\, v^e - \underbrace{\int_x \boldsymbol{N}^{eT} p\, dx}_{\boldsymbol{P}^e}\, \delta v^e = \boldsymbol{R}^e \;\text{ bzw. }\; \boldsymbol{K}^e v^e - \boldsymbol{P}^e = \boldsymbol{R}^e \quad .$$

Die nichtlinear elastischen Verbindungen an den Gerüstknoten werden durch finite Zwei-Knoten-Federelemente modelliert, welche die Relativverschiebungen der einzelnen Freiheitsgrade mit nichtlinear elastischen Materialgesetzen beschreiben können. Für eine erleichterte Eingabe des statischen Systems alleine über die äußeren Knoten $a$ können die Federanschlüsse in das Balkenelement integriert und die inneren Knoten $i$ aus der Gleichgewichtsbedingung statisch herauskondensiert werden:



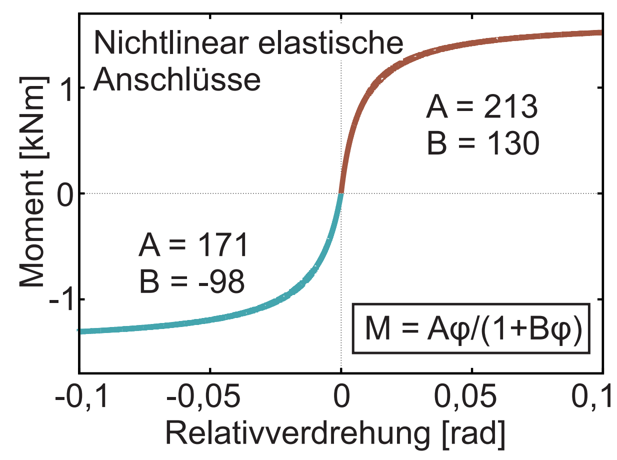

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ai} \\ \boldsymbol{K}_{ia} & \boldsymbol{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{v}_a \\ \Delta \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_a \\ \boldsymbol{G}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_a \\ \boldsymbol{R}_i \end{bmatrix}$$

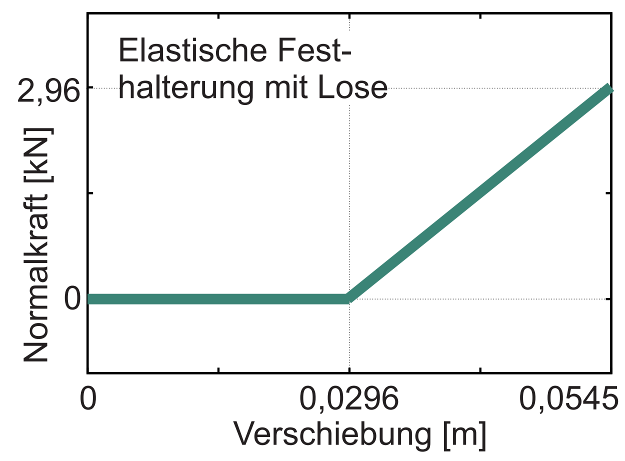
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ai}\, \boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\, \boldsymbol{K}_{ia}\right)}_{\tilde{\boldsymbol{K}}_{kon}} \Delta \boldsymbol{v}_a + \underbrace{\left(\boldsymbol{G}_a - \boldsymbol{K}_{ai}\, \boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\, \boldsymbol{G}_i\right)}_{\tilde{\boldsymbol{G}}_{kon}} = \underbrace{\boldsymbol{R}_a}_{\tilde{\boldsymbol{R}}_{kon}}$$

## 3. Numerisches Beispiel

| Systemeigenschaften | | |
| --- | --- | --- |
| h = | 2,00 | m |
| b = | 0,75 | m |
| $q_{w,d}$ = | 0,50 | kN/m |
| $q_{n,d}$ = | 4,00 | kN/m |
| **Materialeigenschaften** | | |
| $E_S$ = | $2{,}1 \times 10^8$ | kN/m² |
| $A_S$ = | $3{,}87 \times 10^{-4}$ | m² |
| $I_S$ = | $1{,}01 \times 10^{-7}$ | m⁴ |
| $E_R$ = | $2{,}1 \times 10^8$ | kN/m² |
| $A_R$ = | $3{,}34 \times 10^{-4}$ | m² |
| $I_R$ = | $1{,}503 \times 10^{-7}$ | m⁴ |

Das nichtlinear elastische Federelement wird in das Programm *FEAP* implementiert. Damit können Gerüstsysteme mit nachgiebigen Verbindungen modelliert werden. Betrachtet wird die Seitenansicht eines Gerüstsystems mit nichtlinear elastischen Verbindungen zwischen den Riegeln und Stielen und einem elastischen Horizontallager. Die System- und Materialparameter werden nach im Gerüstbau typischerweise auftretenden Kennwerten gewählt. Die jeweiligen Federkennlinien sind in den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen dargestellt.




Die Ergebnisse für den Momentenverlauf und die Verschiebungen sind abgebildet. Vergleichend wird die Verschiebungsberechnung für steife Verbindungen durchgeführt.