

Zur Behandlung von 2D-Timoshenko-Balken im Rahmen der FEM: Theorie und numerische Modelle

Eszter Anna Kósa

1. Einleitung

Bei Balkenelementen wird in der Regel zwischen dem schubstarreren Bernoulli- und dem schubweichen Timoshenko-Balken unterschieden. Bei der numerischen Berechnung von Timoshenko-Balken mithilfe der Finite-Elemente-Methode und linearen Ansatzfunktionen kann eine zusätzliche Versteifung bei reiner Biegebelastung beobachtet werden. Ziel der Arbeit ist die Behebung dieses Versteifungseffekts mithilfe unterschiedlicher Kombinationen von Ansatzfunktionen und variabler Anzahl der Gauss-Punkte.

2. Schwache Formulierung

Für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode werden die Differentialgleichungen am Timoshenko-Balken aufgestellt. Dies erfolgt mithilfe der Kinematik, der Gleichgewichtsbeziehungen und des Stoffgesetzes. Die Differentialgleichungen werden durch Multiplikation mit Testfunktionen in die schwache Formulierung überführt:

$$\delta\Pi = \int_0^L \delta\varepsilon N dx + \int_0^L \delta\gamma Q dx + \int_0^L \delta\kappa M dx + \delta\Pi^{ext}.$$

Die Freiheitsgrade u, w und β können im Rahmen der Finite-Elemente-Methode mit linearen Ansatzfunktionen approximiert werden.

3. Problematik Schublocking

Bei der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen kann bei reiner Biegebeanspruchung eine zusätzliche Verdrehung des Querschnittes infolge Querkraft auftreten. Dies ist bedingt durch die Tatsache, dass die Ableitung der Durchbiegung w stets einen niedrigeren Polynomgrad, als die Ansatzfunktion der Verdrehung β besitzt.

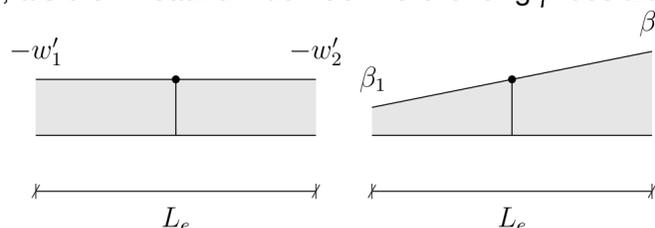


Abbildung 1: Unterintegration der Schubanteile

Somit ist die Gleichung der Schubverzerrung γ nicht über die gesamte Elementenlänge erfüllt:

$$\gamma = w' + \beta \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit der Variation der Gauss-Punkteanzahl kann die numerische Integration mit wenigen Stützstellen durchgeführt und somit unterintegriert werden. Damit wird die Erfüllung der Gleichung der Schubverzerrung angestrebt.

4. Quadratische und gemischte Ansätze

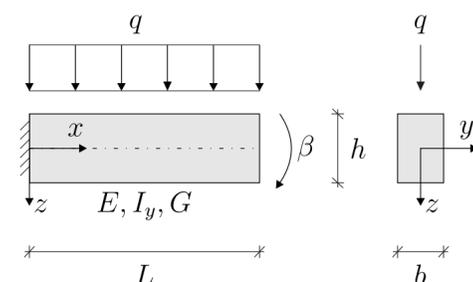
In der Arbeit wurde der Einfluss von quadratischen und gemischten Ansatzvariationen auf den Schublocking-Effekt untersucht. Für die quadratischen Ansätze wird zusätzlich ein mittlerer Knoten am Element eingeführt. Bei gemischten Ansätzen ist es möglich für w' und β den gleichen Polynomgrad zu erhalten.

Für eine einheitliche Berechnung wird der innere Knoten bei quadratischen Ansätzen mittels statischer Kondensation eliminiert. Hierfür werden die Matrix- und Vektoreinträge nach äußeren (a) und inneren (i) Knotenwerten umgestellt.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ai} \\ \mathbf{k}_{ia} & \mathbf{k}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{[\mathbf{k}_{aa} - \mathbf{k}_{ai} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ia}]}_{\mathbf{k}_{stako}} \mathbf{u}_a = \underbrace{[\mathbf{f}_a - \mathbf{k}_{ai} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{f}_i]}_{\mathbf{f}_{stako}}$$

Somit können die elementbezogene Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}^e , der Lastvektor \mathbf{f}^e und der Verschiebungsvektor \mathbf{v}^e auf die Einträge der äußeren Knoten reduziert werden.

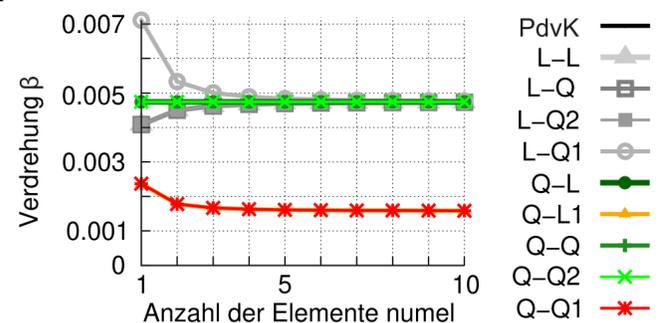
5. Numerisches Beispiel



Als Beispiel wird das Konvergenzverhalten unterschiedlicher Kombinationen von Ansatzfunktionen an einem stark gedrungene Kragarm untersucht. Die Elementbezeichnung folgt der Konvention:

$\underbrace{Q}_{\text{Polynomgrad } w}$ $\underbrace{2}_{\text{Gausspunkte Biegung}}$ $-$ $\underbrace{L}_{\text{Polynomgrad } \beta}$ $\underbrace{1}_{\text{Gausspunkte Schub}}$

Sofern keine Zahl vorhanden ist, wurde der Anteil numerisch exakt integriert.



In den berechneten Beispielen traf die Kombination Q-Q2 stets die analytische Lösung. In Abhängigkeit der Randbedingungen konnten auch weitere Kombinationen direkt die analytische Lösung treffen. Bei Q-Q1 und Q-L1 Elemente zeigte sich in vielen der Beispiele auch bei erhöhter Diskretisierung der Schublocking-Effekt.