Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Modellierung von 2D-Vouten-Elementen: Theorie und numerische Modelle

Jeremy Geiger

1. Einleitung

Für die Dimensionierung von Tragwerken sind Voutenstäbe ein bewährtes Bemessungselement. Aufgrund der variablen Querschnittsgeometrie garantiert das Bauteil einen nachhaltigen und wirtschaftlichen Materialeinsatz. Gegeben sind die Differentialgleichungen (DGLn) eines Bernoulli-Balkens mit veränderlichem Querschnitt.

$$\begin{aligned} (EA(x)\,u'(x))' + n(x) &= 0 \\ (\text{-}EI(x)\,w(x)'')'' + q(x) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ziel der Arbeit ist es, mit unterschiedlichen FE-Ansätzen die Differentialgleichungen zu lösen bzw. zu approximieren und die Genauigkeit der numerischen Modelle an Beispielrechnungen zu diskutieren.

2. Linear-kubischer Ansatz

Die homogenen DGLn eines Balkens mit konstantem Querschnitt werden mit dem linearen Ansatz für die Verschiebung u und mit dem kubischen Ansatz für die Durchbiegung w erfüllt. Diese werden hier für die Approximation eines Balkens mit veränderlichem Querschnitt verwendet.

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2\,x \\ w &= c_3 + c_4\,x + c_5\,x^2 + c_6\,x^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Die diskrete Form des Prinzips der virtuellen Arbeit führt mit (2) auf die Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{k}^e$ des Voutenelements in natürlichen ξ,η-Koordinaten. Die Integration der von der Vouten- und Querschnittsgeometrie abhängigen Polynome n-ter Ordnung erfolgt mittels numerischer Integrationsverfahren.

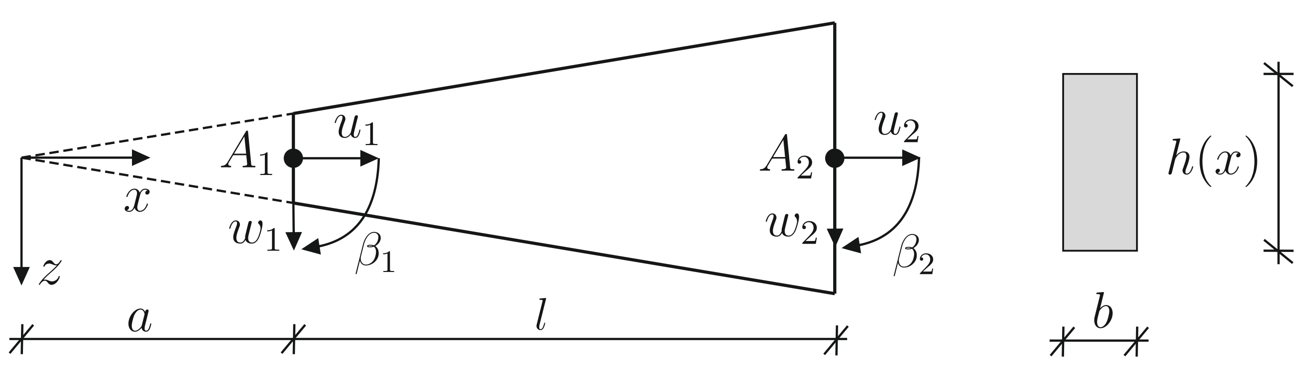
$$\boldsymbol{k}^e = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}^T(\xi_k)\,\boldsymbol{C}(\xi_k)\,\boldsymbol{B}(\xi_k)\,w_k\,\frac{l_e}{2} \tag{3}$$

3. Logarithmischer Ansatz

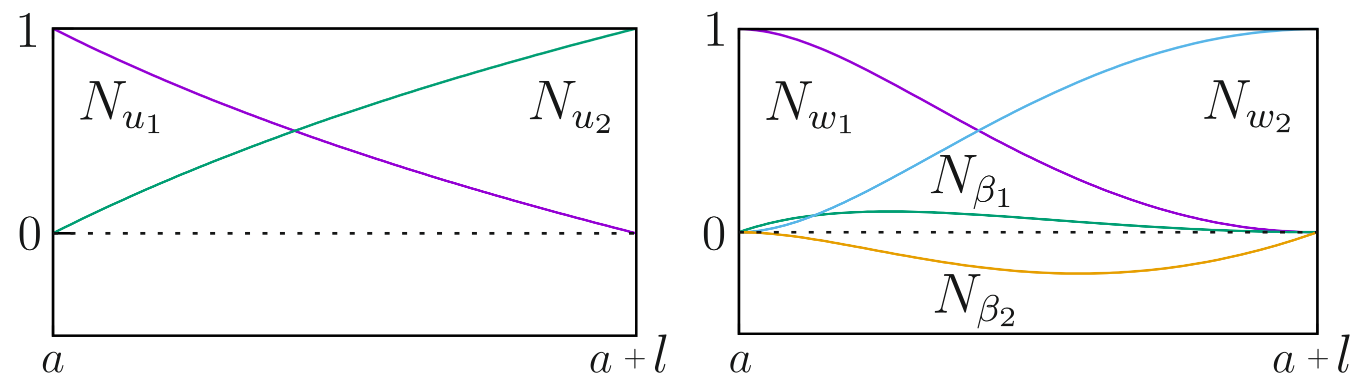
Die exakten Lösungen der homogenen DGLn eines Balkens mit Rechteckquerschnitt und linear veränderlicher Höhe sind gegeben durch logarithmische Ansätze. [*Kiener*, 1988]

$$\begin{aligned} u &= c_1 + c_2 \ln(x) \\ w &= c_3 + c_4\,x + c_5\,\frac{1}{x} + c_6 \ln(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Eine FE-Formulierung erfordert die Projektion des Trägerabschnitts auf den Koordinatenurspung und Rückrechnung der Länge a.

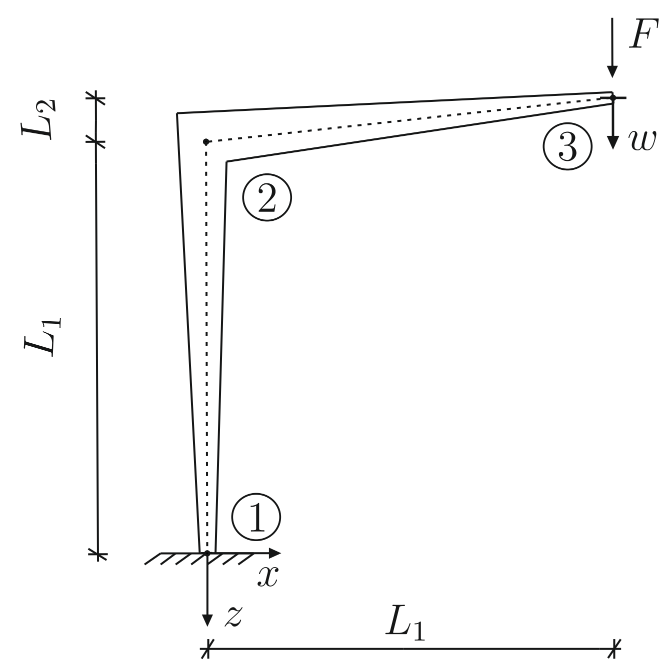


Nachfolgend sind die log. Ansatzfunktionen dargestellt. An der Antimetrie der Einheitsverschiebungszustände des beidseitig eingespannten Voutenelements wird der Einfluss der veränderlichen Steifigkeit auf die Gesamtverformungen des Systems verdeutlicht.



4. Numerisches Beispiel

Eine Gegenüberstellung der Lösungsansätze erfolgt unter Berücksichtigung eines kommerziellen Stabwerkprogramms, welches die Voute als Summe konstanter Trägerabschnitte darstellt. Die Querschnittseigenschaften werden mit einem allgemeinen, für Rechteckquerschnitte exakten, Interpolationsansatz ermittelt.



Die FE-Lösung des log. Voutenelements entspricht der einer analytischen Handrechnung. Somit wurde ein exaktes Modell mit einem Element pro Stab für beliebig komplexe Voutensysteme mit Rechteckquerschnitt implementiert. Die verbleibenden Modelle zeigen mit steigender Diskretisierung ein Konvergenzverhalten. Mit dem Ansatz des kommerziellen Programms wird allerdings eine höhere Diskretisierung benötigt, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen.