

# Mechanische Formoptimierung mittels Phasenfeldmethode

Christian Gierden

## 1. Motivation und Ziele

Durch die Formoptimierung mechanisch belasteter Bauteile können diese mit einem gewünschten Füllgrad  $\hat{K}$  und einer optimalen Steifigkeit entwickelt werden.

Ziel der Arbeit ist die Realisierung der mechanischen Formoptimierung mittels Phasenfeldmethode. Hierfür wird der Phasenfeldparameter  $\varphi$  eingeführt, der den Zustand zweier Phasen (mit und ohne Material) beschreibt.

## 2. Formfindung mittels Phasenfeldmethode

Die variationelle Form der Randwertaufgabe für die Formoptimierung mittels Phasenfeldmethode wird mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie bestimmt. Die Gesamtenergie wird wie folgt konstruiert:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, \dot{\varphi}, \mathbf{u}) = & \int_{\mathcal{B}} \left[ \underbrace{C_1(\varphi^6 - \varphi^4 + \gamma_w \varphi^2 + 1)}_{\text{Brunnenenergie}} + \underbrace{C_2 \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} (K - \hat{K})^2}_{\text{Füllenergie}} \right. \\ & + \underbrace{C_3 \frac{1}{2} \|\text{Grad } \varphi\|^2}_{\text{Phasengradientenenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}_\varphi : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{Elastische Energie}} - \underbrace{\frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2}_{\text{Entropie}} \\ & \left. - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} [\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \gamma \varphi]}_{\text{Energie aus Volumenlasten}} dV - \int_{\partial \mathcal{B}} \underbrace{[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} + y \varphi]}_{\text{Energie aus Oberflächenlasten}} dA \right] \end{aligned}$$

Die Materialmatrix für die Berechnung der elastischen Energie wird durch den Phasenfeldparameter  $\varphi$  beeinflusst:

$$\mathbf{C}_\varphi = \frac{e^{\alpha \varphi}}{e^{\alpha \varphi} + 1} \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

So wird erreicht, dass die Phase mit Material eine volle Steifigkeit und die Phase ohne Material keine Steifigkeit aufweist. Damit handelt es sich um ein materiell nichtlineares Randwertproblem.

## 3. Spannungsbasierte Phasenfeldbelastungen

Im Rahmen einer Erweiterung der Basistheorie wird der An- bzw. Abbau von Material zusätzlich durch volumetrische Phasenfeldbelastungen  $\gamma$  gefördert. Diese werden abhängig von einem Grenzwert, der sich aus einem auf Basis des gewünschten Füllgrads  $\hat{K}$  angepassten Median der Von-Mises-Vergleichsspannungen bildet, berechnet. Dementsprechend werden die Vergleichsspannungen an jedem Gauss-Punkt ausgewertet, in einem Vektor  $f_j$  gespeichert und der Größe nach sortiert. Der Grenzwert  $\bar{\sigma}_V$  berechnet sich wie folgt:

$$\bar{\sigma}_V = f_j \quad j = \left(1 - \frac{\hat{K} + 1}{2}\right) \cdot GP_{tot}$$

Mit  $GP_{tot}$  als Summe aller Gauss-Punkte im System. Die Belastung des Phasenfeldparameters ergibt sich zu

$$\gamma = \frac{\sigma_v - \bar{\sigma}_V}{\bar{\sigma}_V}$$

## 4. Numerische Beispiele

Die Ausgangskonfiguration (AK) des Phasenfeldparameters ist bei jedem Beispiel eine homogene Verteilung mit  $\varphi = 0$ . Ausgehend hiervon wird die optimale Form für unterschiedliche Systeme mit unterschiedlichen Belastungen und Lagerungen berechnet. Das erste Beispiel ist eine Quadratscheibe mit einem vorgegebenen Füllgrad von  $\hat{K} = 0$ , die sowohl mit der Basistheorie (BT) als auch mit der Erweiterung durch Spannungsbasierte Phasenfeldbelastungen (SPB) berechnet ist (vgl. Abb. 1).

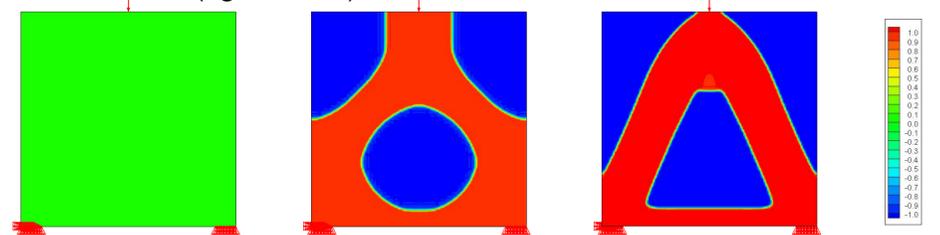


Abbildung 1: Homogene Materialverteilung der AK (links), Optimierung mit BT (mittig) und Optimierung mit EdSPHB (rechts)

Die Skala neben den Grafiken gibt den Wert des Phasenfeldparameters  $\varphi$  an, wobei  $+1$  für die Phase mit und  $-1$  für die Phase ohne Material steht. Die berechnete Form mit SPB ist hierbei deutlich besser für den Lastabtrag geeignet.

Mit Hilfe dieser Erweiterung ist es auch möglich komplexere Beispiele mit einem geringeren Füllgrad wie in Abb. 2 und Abb. 3 zu berechnen. Abb. 2 zeigt einen Kragarm und Abb. 3 einen Einfeldträger jeweils mit einem Seitenverhältnis von 2:1. Die optimierten Formen die hierfür berechnet sind weisen einen Füllgrad von  $\hat{K} = 0$  bzw.  $\hat{K} = -0,75$  auf. Es ist zu erkennen, dass sich immer eine fachwerkartige Struktur ausbildet, um die Last abzutragen.

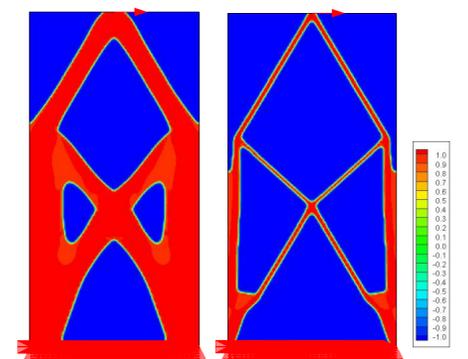


Abbildung 2: Optimierung mit SPB  $\hat{K} = 0$  (links) und  $\hat{K} = -0,75$  (rechts)

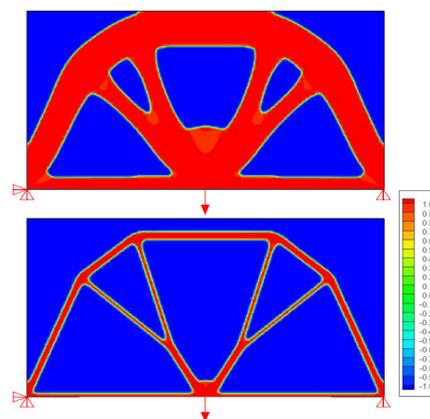


Abbildung 3: Optimierung mit SPB  $\hat{K} = 0$  (oben) und  $\hat{K} = -0,75$  (unten)



Abbildung 5: Ergebnis der Formoptimierung aus [Takezawa, Nishiwaki, Kitamura. J. Comp. Physics (229), 2697-2718, 2010]