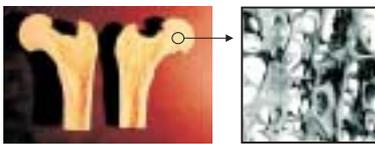


Einleitung

Als Erweiterung des BOLTZMANN-Kontinuums ordnet die COSSERAT-Theorie jedem materialen Punkt im Körper innere Parameter zu, welche als Rotationen interpretiert werden können. Somit verfügt jeder materielle Punkt neben den Verschiebungs- auch über Verdrehfreiheitsgrade und stellt damit ein mechanisches Modell zur Erfassung der Mikrostruktur eines Materials, wie z.B. Knochen dar.



Verzerrungsgrößen

Auf Basis des rechten Strecktensors \mathbf{U} , werden die 1. COSSERAT-Verzerrungen \mathbf{H} eingeführt, welche mit den Spannungen \mathbf{T} korrespondieren. Die 2. COSSERAT-Verzerrungen \mathbf{K} beschreiben die Änderung des Rotationsfeldes in eine bestimmte Richtung i . Die arbeitskonformen Spannungen dazu sind die Momentenspannungen \mathbf{M} .

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{I} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \mathbf{k}_i \text{ axial} \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_{,i}$$

Das Spannungshybride Funktional

Den Ausgangspunkt für die FINITE-ELEMENTE Formulierung stellt das HELLINGER-REISSNER Funktional dar.

$$\Pi_{HR} = \int_{B_0} [\mathbf{T} : \mathbf{H} + (\mathbf{H} - \mathbf{T} : \mathbf{C}^{-1}) : \mathbf{T} + \mathbf{M} : \mathbf{K}] dV + \Pi_{ext}$$

Nach Einbringen der FINITE-ELEMENTE-Approximation in das linearisierte Funktional und Separation der variierten Freiwerte lassen sich die Einträge im Gesamtgleichungssystem erkennen.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{uy} & \mathbf{K}^{uc} \\ \mathbf{K}^{wu} & \mathbf{K}^{wy} & \mathbf{K}^{wc} \\ \mathbf{K}^{cu} & \mathbf{K}^{cy} & \mathbf{K}^{cc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{pmatrix}$$

Die Spannungsfreiwerte $\Delta \mathbf{C}$ werden auf Elementebene kondensiert, womit man ein auf die primären Prozessvariablen reduziertes Gleichungssystem erhält.

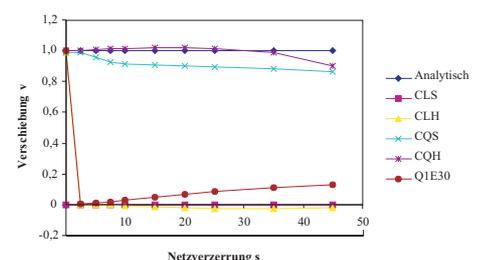
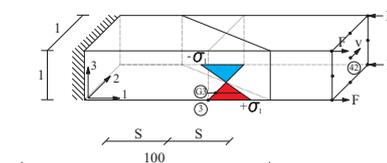
Der Spannungsansatz

Der vollständig trilineare Ansatz für das 8-Knoten Element für die Verschiebung in u -Richtung lässt sich in Abhängigkeit der Einheitsverschiebungszustände darstellen. Differenzieren der Ansatzfunktion liefert die Verzerrungen, welche für die Biegemodi mit parasitären Termen behaftet sind. Nach streichen der parasitären Terme lassen sich die zu den Verzerrungen energetisch konjugierten Spannungen für linear-elastisches Material erkennen. Approximiert man die Schubterme analog zu den Normalspannungen, erkennt man eine Isotropie in der entsprechenden Flächennormale. Dieser Ansatz führt für das 8-Knoten Element auf 36 interne Spannungsfreiwerte, für das 27-Knoten Element erhält man 162 internen Spannungsfreiwerten je Element.

Querkräftefreier Kragarm

Für ein reines Biegeproblem wird der Einfluss der Netzverzerrung untersucht. Die Materialparameter wurden so eingestellt, dass sich die analytische Lösung für ein konstantes Moment $M = 2MNm$ zu $v = 1m$ ergibt.

Für eine geometrisch nichtlineare Rechnung lässt sich dann die Verschiebung in Abhängigkeit der Netzverzerrung angeben.



Die 27-Knoten Elemente nach der hybriden Theorie CQH und nach der nichthybriden Theorie CQS

liefern für verzerrte Netze gute Ergebnisse. Die Spannung am Gausspunkt G3 zeigt den Unterschied zwischen der hybriden und nichthybriden Berechnung. \mathbf{T} wurde mit den Materialtensor und den Verzerrungen \mathbf{H} berechnet und weist parasitäre Terme auf.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 9,29 & -156 & -0,1410^{-3} \\ 156 & -0,9710^{-3} & -0,1110^{-2} \\ -0,7510^{-1} & -0,1110^{-2} & -0,1810^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{Hyb} = \begin{pmatrix} 9,28 & 0,1310^{-1} & -0,1310^{-4} \\ -0,4010^{-1} & -0,7910^{-4} & -0,2810^{-6} \\ -0,4010^{-4} & -0,3010^{-6} & -0,1810^{-2} \end{pmatrix}$$