Karlsruher Institut für Technologie

BAUSTATIK

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Ein robustes Zeitintegrationsverfahren für nichtlineare dynamische Probleme - Entwicklung, Analyse und Optimierung

Simon Klarmann

1. Einleitung

In einigen praktischen Anwendungsbereichen werden dynamische Berechnungen der Tragstrukturen erforderlich. Als Beispiele seien Schwingungen von Brücken, Gebäude sowie Windkraftanlagen oder Rotoren von Flugzeugen zu nennen. Die Lösungen sind dabei zeitabhängig und erfordern somit separate Lösungsverfahren. Diese lassen sich dabei in zwei Gruppen, explizite und implizite Verfahren, einteilen. Die Expliziten haben dabei den erheblichen Nachteil der bedingten Stabilität, was zu einer netzabhängigen maximalen Wahl der Zeitschrittweite Δt führt. Implizite Verfahren sind hingegen unbedingt stabil und erlauben eine netzunabhängige Wahl von Δt. Allerdings verlieren viele dieser Verfahren ihre Stabilitätseigenschaften, sobald nichtlineare Berechnungen durchgeführt werden. Um dennoch verlässliche Ergebnisse zu erhalten, können numerisch gedämpfte Verfahren zum Ziel führen.

2. Ansätze in der Zeit

Das hier untersuchte Verfahren, das Kompositverfahren von Bathe, ist ein Implizites mit starker numerischer Dämpfung der hohen Frequenzen. Um dies zu erreichen, wird ein Rückwärtsdifferenzenverfahren mit den folgenden Ansätzen verwendet:

$$\dot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t} = a_1 \cdot \mathbf{v}_t + a_2 \cdot \mathbf{v}_{t+\gamma\Delta t} + a_3 \cdot \mathbf{v}_{t+\Delta t}$$

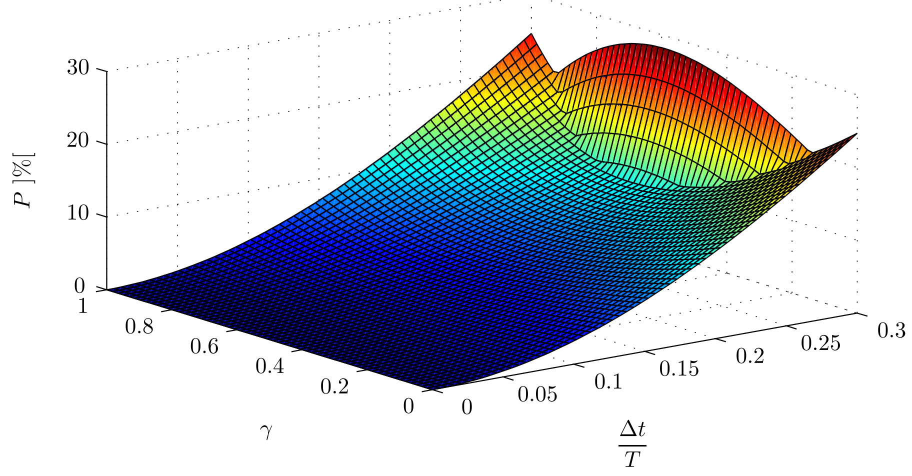
$$\ddot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t} = a_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_t + a_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}_{t+\gamma\Delta t} + a_3 \cdot \dot{\mathbf{v}}_{t+\Delta t}$$

$$a_1 = \frac{1-\gamma}{\gamma \cdot \Delta t} \quad a_2 = \frac{-1}{(1-\gamma)\cdot\gamma\cdot\Delta t} \quad a_3 = \frac{(2-\gamma)}{(1-\gamma)\cdot\Delta t}$$

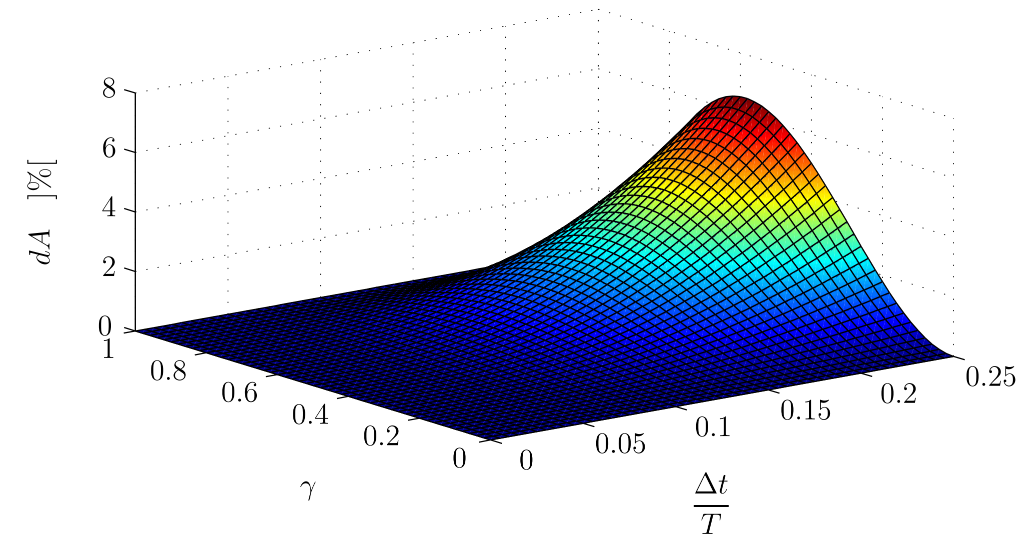
Dabei wird die Abhängigkeit des Zustandes zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ von t und $t+\gamma\Delta t$ ersichtlich. Um diese für das Gesamtverfahren aufzuheben, wird der Zwischenzustand mit der Trapezregel ermittelt.

3. Analytische Untersuchung

Im Fall von linearen Berechnungen lassen sich die Eigenschaften des Verfahrens mittels einer Untersuchung der Amplifikationsmatrix bestimmen. Deren Eigenwerte geben Aufschluss über die Stabilität, Periodenverzögerung und numerischer Dämpfung des Verfahrens.



Periodenverzögerung

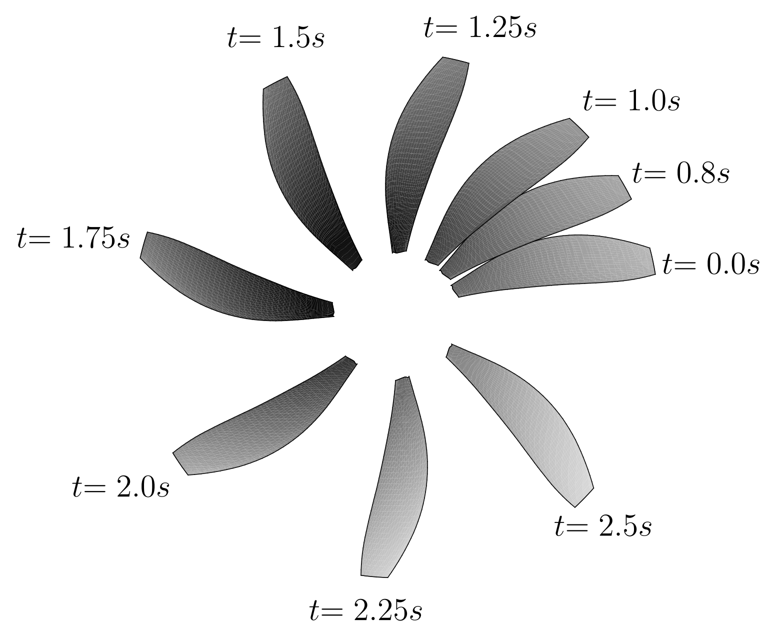


Amplitudenreduktion

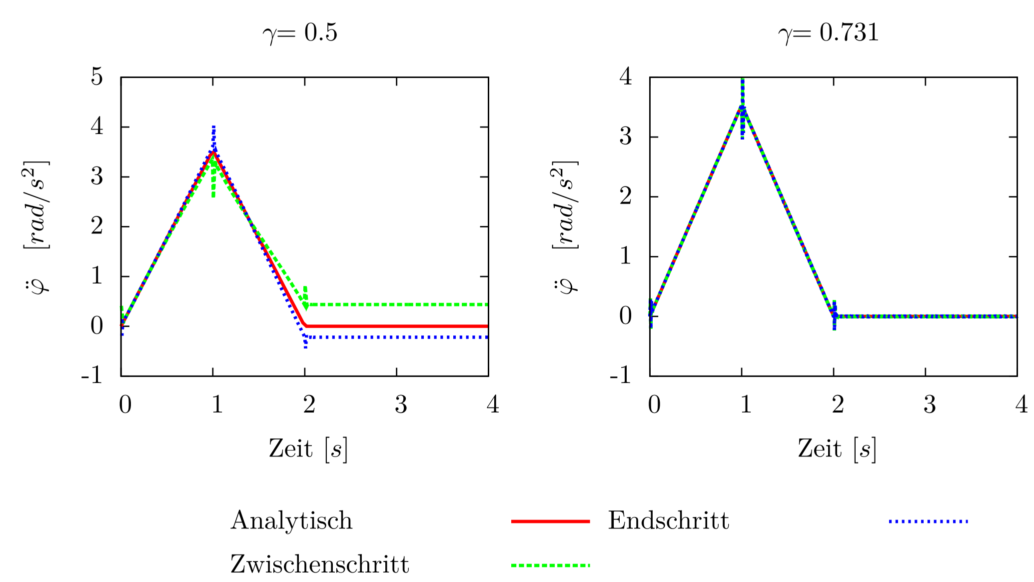
Den dargestellten Funktionen lässt sich der Extremwert $\gamma = 2 - \sqrt{2}$ entnehmen, für welchen das Verfahren bei linearen Berechnungen die geringste Periodenverzögerung sowie die maximale numerische Dämpfung aufweist.

4. Numerisches Beispiel

Um das Verhalten des Verfahrens bei nichtlinearen Berechnungen zu erfassen, wird das FE-Modell eines Rotorblatts von einem Propfan gewählt. Ziel ist die Überprüfung der Qualität der Ergebnisse.



Das Verfahren ist in der Lage, die Rotation des Rotorblatts stabil zu berechnen.



Bei Betrachtung der Winkelbeschleunigungen der Antriebsachse erhält man für den Wert $\gamma = 0.731$ die besten Ergebnisse. Dieser Wert ist im Falle von nichtlinearen Berechnungen zu bevorzugen.