

Untersuchung von nichtlinearen Schwingungsphänomenen am Beispiel des Duffing-Oszillators

Lukas Lienhard

1. Motivation und Ziele

Wird ein System dynamisch belastet, ist die Folge dessen eine Schwingung. In den meisten Fällen wird diese Schwingung mittels einer linearen Differentialgleichung beschrieben. Durch diese Linearisierung werden gewisse materielle und geometrische Nichtlinearitäten nicht beachtet. Sind diese Nichtlinearitäten nicht mehr vernachlässigbar, müssen sie in Form von nichtlinearen Schwingungsgleichungen berücksichtigt werden. Im Bereich der Resonanzstelle treten bedingt durch die nichtlinearen Effekte große Unterschiede auf, welche in dieser Arbeit untersucht und in einen geeigneten Kontext gestellt werden.

2. Numerische Zeitintegration

Um die nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichung nach Duffing

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx + \alpha x^3 = F_0 \sin(\Omega t)$$

zu lösen, müssen nach einer Diskretisierung der Zeitachse numerische Zeitintegrationsverfahren angewandt werden. Durch die Nichtlinearität der DGL muss in allen impliziten Verfahren eine interne Newton-Iteration mittels Taylor-Reihenentwicklung

$$L[\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1})] = \mathbf{R}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_n) (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)$$

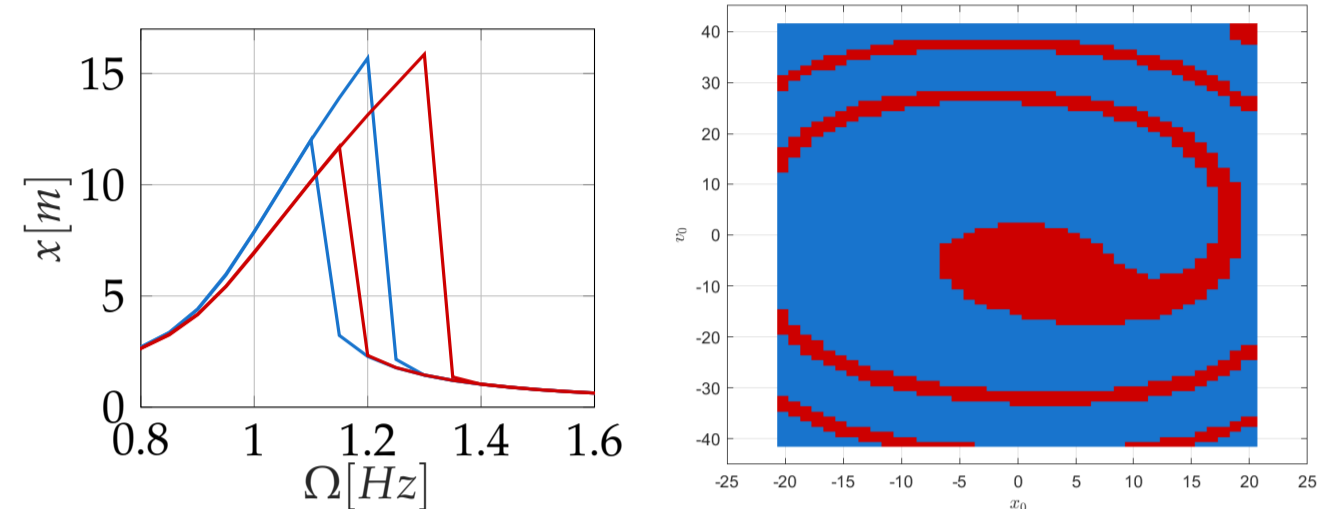
pro Zeitschritt Δt durchgeführt werden, mit dem Residuum

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) = \begin{bmatrix} u_{n+1} - u_n + v_n \Delta t - ((0,5 - \beta)a_n + \beta a_{n+1}) \Delta t^2 \\ v_{n+1} - v_n - ((1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}) \Delta t \\ a_{n+1} - \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t_{n+1}) + 2D\omega_0 v_{n+1} + \omega_0^2 u_{n+1} + \frac{\alpha}{m} u_{n+1}^3 \end{bmatrix}$$

welches abhängig ist vom Zeitintegrationsverfahren, hier exemplarisch das lineare Beschleunigungsverfahren.

3. Nichtlineare Schwingungen

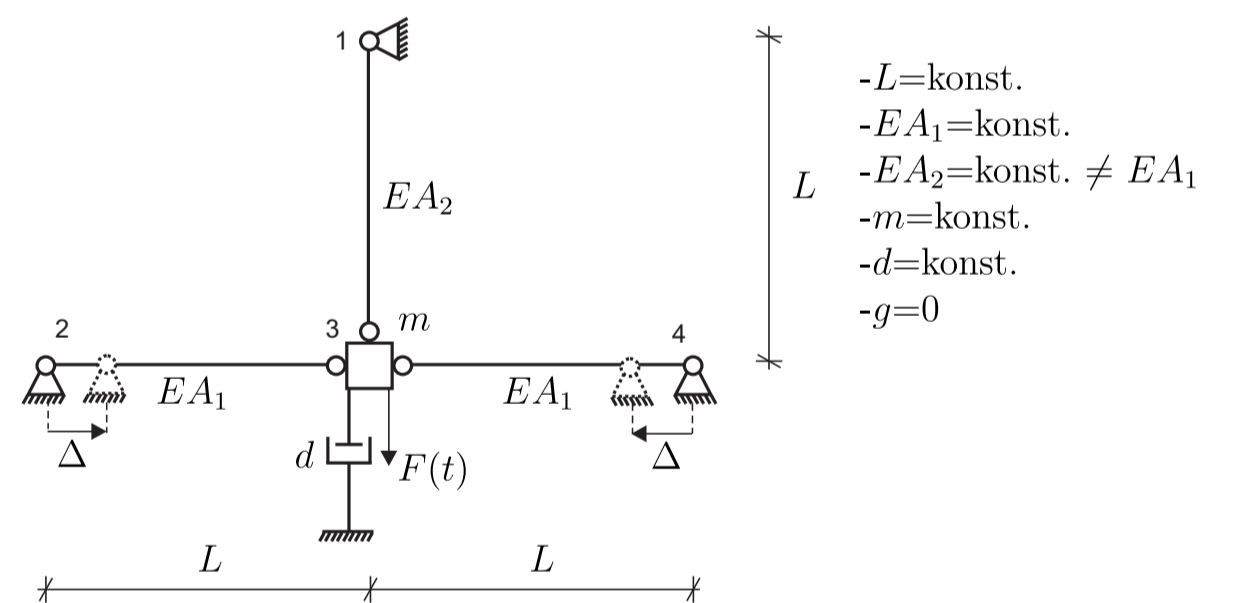
Durch die Erweiterung der linearen Steifigkeit durch den kubischen Term können geometrische und materielle Nichtlinearitäten abgebildet werden. Gerade in der Nähe der Resonanzstelle ergeben sich interessante Phänomene, wie beispielsweise der Amplitudensprung. In Abhängigkeit der Anfangsbedingungen x_0 und v_0 können verschiedene Amplitudenauslenkungen bei verschiedenen Erregerfrequenzen Ω generiert werden. Ein weiteres Phänomen einer nichtlinearen Schwingung ist das chaotische Systemverhalten, welches sich bei bestimmten Kombinationen der Erregerparameter F_0 und Ω einstellt.



Die Anzahl der stationären Lösungen der nichtlinearen DGL ist abhängig vom Vorzeichen des Terms $k_{lin}x$. Das Erreichen des jeweiligen Pfades ist von x_0 und v_0 abhängig.

4. Numerisches Beispiel einer Fachwerkschwingung

Geometrisch nichtlineare baustatische Systeme können nach einer dynamischen Belastung einer mehrstationären nichtlinearen Schwingung folgen. Diese Schwingung besitzt mehrere stationäre Lösungen. Diese Lösungen werden in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen x_0 und v_0 erreicht.



Durch die Herleitung der Schwingungs-DGL des Systems wird deutlich, dass dieses in Abhängigkeit der durch die Lagerverschiebung Δ generierte Vorspannung, einer nichtlinearen Schwingung folgt. Über das Systempotential kann die Rückstellkraft

$$F_R = \underbrace{\left(\frac{EA_2}{L} - 2\Delta \frac{EA_1}{L^2} + \Delta^2 \frac{EA_1}{L^3} \right)}_{=:k} x + \underbrace{\left(\frac{EA_1}{L^3} \right)}_{=: \alpha} x^3$$

bestimmt werden. Das baustatische System wird mit FEAP, die DGL mit Matlab simuliert und die Ergebnisse werden verglichen.

