

# Ein Finite-Element-Modell für das stationäre 3D-Wärmeleitungsproblem

Elena Maier

## 1. Einleitung

Partielle Differentialgleichungen stellen ein wichtiges Werkzeug zur Beschreibung von Problemstellungen in der Baupraxis dar. Unter anderem kann die Wärmeleitung durch eine solche Gleichung mathematisch beschrieben werden. Falls für die Wärmeleitungsgleichung keine geschlossene, analytische Lösung vorliegt, kann mit numerischen Methoden, z.B. der Finite-Elemente-Methode (FEM), eine Näherungslösung ermittelt werden. Ziel der Arbeit ist die Implementierung eines finiten Elements zur Berechnung der stationären Wärmeleitung in das Finite-Elemente-Analysen-Programm FEAP.

## 2. Wärmeleitung

Die Wärmeleitung kommt durch ein Temperaturgefälle in einem Festkörper zustande und äußert sich durch die Abgabe von Energie der wärmeren an die kälteren Teilchen. Das Fouriersche Gesetz stellt dabei den Zusammenhang zwischen Wärmestrom  $q$  und Temperatur  $\Theta$  her. Durch Einsetzen des Wärmeleitungsgesetzes

$$q = -\underline{\Lambda} \nabla \Theta$$

in die Wärmemengenbilanz eines Volumenkörpers

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} q - Q) dV = 0$$

ergibt sich die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der stationären Wärmeleitung. Dabei wird eine mögliche Wärmequelle oder -senke durch  $Q$  erfasst. Zusammen mit den Randbedingungen kann die starke Form aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda} \Delta \Theta - Q &= 0 & \forall x \in \Omega \\ \Theta &= \Theta_R & \forall x \in \partial\Omega_{\Theta} \\ q_R &= q^T n & \forall x \in \partial\Omega_q. \end{aligned}$$

## 3. Schwache Form und Finite-Elemente-Methode

Durch Multiplikation mit der Testfunktion  $\delta\Theta$ , partielle Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes wird die Wärmeleitungsgleichung in die schwache Form überführt:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \delta\Theta)^T \underline{\Lambda} \operatorname{grad} \Theta dV = - \int_{\partial\Omega_q} \delta\Theta q^T n dA + \int_{\Omega} \delta\Theta Q dV.$$

Das betrachtete Gebiet wird in endlich viele Elemente (finite Elemente) unterteilt. Mittels linearer und quadratischer Ansatzfunktionen werden die Feldgrößen sowie die Geometrie des Gebiets approximiert. Aus der schwachen Form ergeben sich mithilfe der numerischen Integration die Konduktivitätsmatrix  $K_e$  und der Wärmequel-

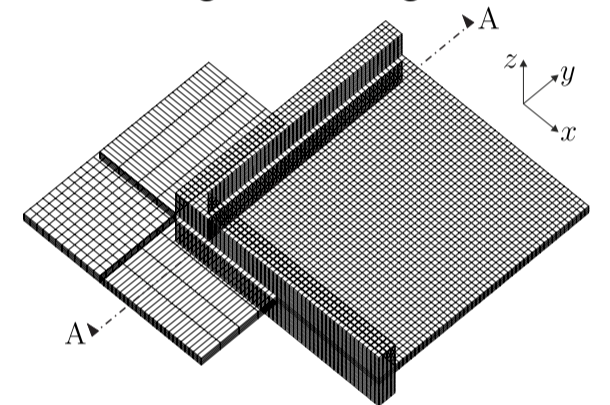
lenvektor  $P_e$  auf Elementebene. Anschließend werden die elementbezogenen Größen zum Gesamtsystem zusammengesetzt:

$$K_g \Theta = P_g.$$

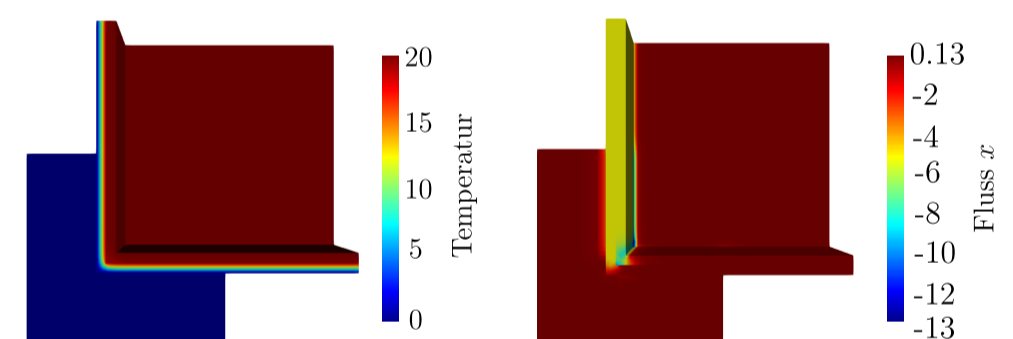
Das Einsetzen der bekannten Randbedingungen liefert das reduzierte Lineare Gleichungssystem, das numerisch gelöst werden kann.

## 4. Numerische Beispiele

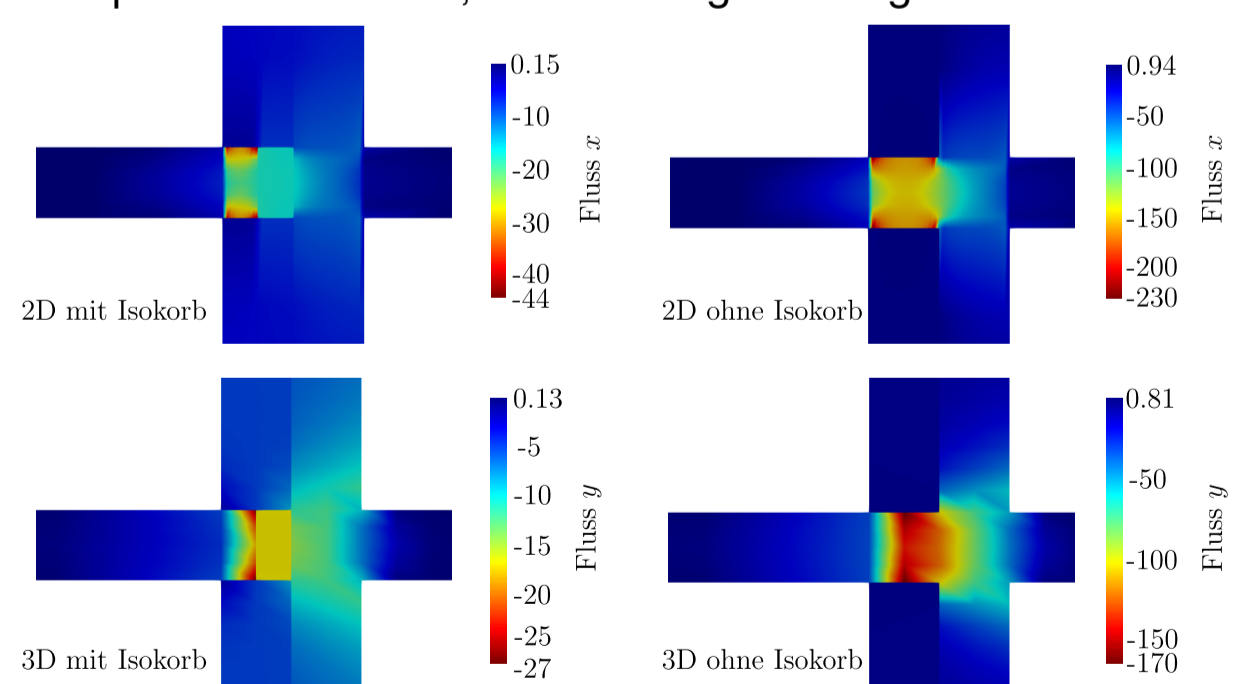
Nach Validierung des erstellten 3D-Wärmeleitelements mittels geeigneter Beispiele und Vergleiche, wird dessen Funktion anhand baupraktischer Problemstellungen dargestellt. Dabei wird unter anderem der Einfluss eines Isokorbs anhand eines Eckbalkon-Modells ermittelt, dessen Netz hier abgebildet ist. Es handelt sich um eine Gebäudeecke einer Stahlbetonkonstruktion mit außenliegender Dämmschicht, die von der auskragenden Stahlbetondecke durchbrochen wird. Nachfolgend sind Temperaturfeld und Wärmefluss des Gesamtsystems als Draufsicht dargestellt.



Nachfolgend sind Temperaturfeld und Wärmefluss des Gesamtsystems als Draufsicht dargestellt.



Durch den Vergleich eines zusätzlich erstellten 2D-Modells mit dem Schnitt A-A im 3D-Modell zeigt sich, dass die Einwirkungen der dritten Raumrichtung in einem zweidimensionalen Schnitt nicht vollständig erfasst werden können. Dies zeichnet sich in den Wärmeflussverläufen quer zur Wand ab, die nachfolgend dargestellt sind.



Zudem verdeutlicht die Gegenüberstellung der Systeme mit und ohne Isokorb die Auswirkung, die der eingebaute Dämmkörper auf den Wärmefluss besitzt. Der Einsatz eines Isokorbs führt zu kleineren Beträgen des Wärmeflusses und dämmt somit den erhöhten Energieverlust ein, der durch die Unterbrechung der Dämmschicht entsteht.