

**Zur Berechnung der Schubspannungen aus
Querkräften in Querschnitten prismatischer Stäbe
mit der Methode der finiten Elemente**

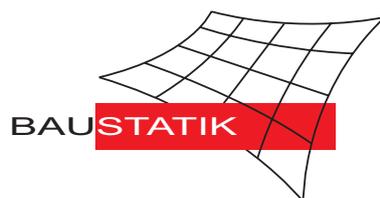
F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer

Mitteilung 4(1997)

**Zur Berechnung der Schubspannungen aus
Querkräften in Querschnitten prismatischer Stäbe
mit der Methode der finiten Elemente**

F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer

Mitteilung 4(1997)



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner Telefon: (0721) 608-2280
Institut für Baustatik Telefax: (0721) 608-6015
Universität Karlsruhe E-mail: bs@uni-karlsruhe.de
Postfach 6980 Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>
76128 Karlsruhe

Zur Berechnung der Schubspannungen aus Querkräften in Querschnitten prismatischer Stäbe mit der Methode der finiten Elemente

F. Gruttmann, W. Wagner und R. Sauer

Herrn Prof. Dr.-Ing. Udo Vogel zum 65. Geburtstag gewidmet.

Zusammenfassung Schubspannungen aus Querkräften in Querschnitten prismatischer Stäbe können bei gegebener Verteilung der Normalspannungen aus den Gleichgewichtsbeziehungen ermittelt werden. Durch Einführung der Querschnittsverwölbung erhält man bei beliebigen Querschnittsformen eine Poissonsche Differentialgleichung mit Neumannschen Randbedingungen. Es wird die schwache Form des Randwertproblems und eine zugehörige Finite-Element-Formulierung im Rahmen der Verschiebungsmethode beschrieben. Die Koordinaten des Schubmittelpunkts können mit den Schubspannungen infolge Querkraft oder mit der Wölbfunktion der St.Venantschen Torsionstheorie ermittelt werden.

On the computation of shear stresses due to bending in prismatical beams using the finite element method

Abstract Shear stresses in cross-sections of prismatical beams can be derived for a given normal stress distribution by integration of the equilibrium equations. With introduction of a warping function for arbitrary cross-sections one obtains Poisson's differential equation and Neumann boundary conditions. The weak form of the boundary value problem and an associated finite element formulation applying the displacement method is derived. The coordinates of the center of shear can be calculated either from the shear stresses or from the warping function of St.Venant's torsion theory.

1 Einleitung

Es wird ein prismatischer Stab mit Stabachse x und Querschnittsachsen y, z , die nicht Hauptachsen sein müssen, betrachtet. Um eine entkoppelte Berechnung von Größen in Richtung der Stabachse und in der Querschnittsebene zu ermöglichen, werden konstante Querschnitte längs der Stabachse vorausgesetzt. Die Schubspannungen aus Querkräften lassen sich aus den Normalspannungen über die Gleichgewichtsbeziehungen ermitteln. Bei dünnwandigen offenen Profilen können in Dickenrichtung konstante Schubspannungen angenommen werden. Unter dieser vereinfachten Annahme ist die Integration der Differentialgleichungen unter Beachtung der Randbedingungen exakt möglich. Liegen geschlossene Profile vor, müssen diese gedanklich aufgeschnitten werden. In den einzelnen Zellen ergeben sich konstante umlaufende Schubflüsse, die dem Schubflußverlauf des offenen Profils überlagert werden, um die Kontinuität an den Schnittstellen zu erzwingen, siehe z.B. Bornscheuer [1]. Bei beliebigen dickwandigen Querschnittsformen ist dieses Vorgehen nicht möglich, da eine Profilmittellinie nicht definiert werden kann und die Schubspannungen quer dazu nicht konstant sind. Mason und Herrmann führen in

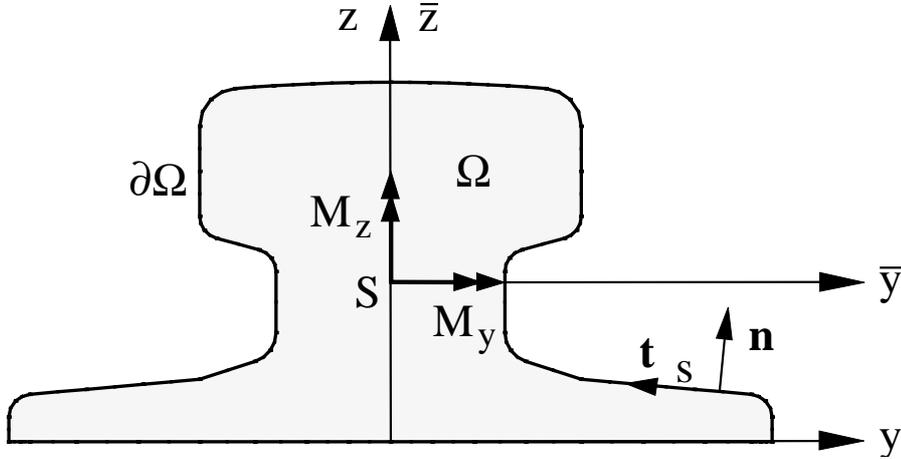


Bild 1: Querschnitt Ω mit nach außen gerichteter Normale – Fig. 1. Cross-section Ω with outward normal vector

[2] Annahmen für das Verschiebungsfeld ein, wobei die Querdehnung des Stabes berücksichtigt wird. Durch Anwendung des Prinzips vom Minimum der gesamten potentiellen Energie werden finite Dreieckselemente entwickelt. Die in [2] berechneten Ergebnisse sind somit von der Querkontraktionszahl abhängig. Die Berechnung von Querschnittsverwölbungen und Profilverformungen ist von Zeller [3], [4] unter Verwendung gemischter finiter Elemente durchgeführt worden.

In dieser Arbeit wird die übliche Stabkinematik um die Querschnittsverwölbung erweitert. Das hieraus formulierte Randwertproblem besteht aus einer Poissonschen Differentialgleichung mit Neumannschen Randbedingungen. Exakte Lösungen sind jedoch nur bei einfachen Geometrien möglich. Deshalb werden die zugehörige schwache Form des Randwertproblems aufgestellt und darauf aufbauend Finite-Element-Formulierungen hergeleitet. Die Beispiele zeigen, daß sich zum Teil erhebliche Spannungskonzentrationen an Einschnürungen der Querschnitte mit deutlichen Abweichungen vom konstanten Verlauf quer zu den Mittellinien ergeben.

2 Querschnittsverwölbungen bei durch Biegung beanspruchten prismatischen Stäben

2.1 Darstellung des Randwertproblems

Bei dem hier betrachteten prismatischen Stab wird die Querschnittsfläche mit Ω und der Rand mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Die Randkoordinate s mit zugehörigem Tangentenvektor \mathbf{t} muß mit einem eindeutigen Umlaufsinn versehen sein. Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n} = [n_y, n_z]^T$ zeigt nach außen, siehe Bild 1. Somit ist bei Querschnitten mit Löchern der Umlaufungssinn an den Innenrändern entgegengesetzt zum Außenrand gerichtet.

Der Stab wird durch Biegemomente M_y und M_z beansprucht. Für das Verschiebungsfeld wird folgende Annahme getroffen

$$\begin{aligned} u_x &= \beta_y(x) \bar{z} - \beta_z(x) \bar{y} + \varphi(y, z) \\ u_y &= v(x) \\ u_z &= w(x), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei β_y und β_z die Drehwinkel um die jeweilige Querschnittsachse sind. Die Verschiebungen quer zur Stablängsachse sind mit $v(x)$ und $w(x)$ beschrieben. Die übliche Stabkinematik mit Unausdehnbarkeit in Querrichtung und Ebenbleiben der Querschnitte wird somit um den Wölbanteil $\varphi(y, z)$ aus Schubspannungen erweitert. Die Verzerrungen ergeben sich durch partielle Ableitungen, die durch Kommas gekennzeichnet sind, zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u_{x,x} &= \beta'_y \bar{z} - \beta'_z \bar{y} \\ \gamma_{xy} &= u_{x,y} + u_{y,x} &= (\beta_z + v') + \varphi_{,y} \\ \gamma_{xz} &= u_{x,z} + u_{z,x} &= (\beta_y + w') + \varphi_{,z} ,\end{aligned}\tag{2}$$

wobei $()'$ die Ableitung nach der Stabkoordinate x beschreibt. Die Spannungen folgen mit dem Elastizitätsmodul E und dem Schubmodul G aus dem Stoffgesetz für linear elastisches Werkstoffverhalten und Gl. (2)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} = E (\beta'_y \bar{z} - \beta'_z \bar{y}) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = G [(\beta_z + v') + \varphi_{,y}] \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G [(\beta_y + w') + \varphi_{,z}] .\end{aligned}\tag{3}$$

Gl. (3)₁ beschreibt eine lineare Verteilung der Normalspannungen in y - und z -Richtung entsprechend der üblichen Stabtheorie. Die übrigen Spannungen werden zu Null gesetzt. Das Gleichgewicht in Stablängsrichtung liefert

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0\tag{4}$$

und mit den Ableitungen der Spannungen $f(y, z) + G(\varphi_{,yy} + \varphi_{,zz}) = 0$. Im folgenden wird der Ausdruck $f(y, z) := E(\beta''_y \bar{z} - \beta''_z \bar{y})$ weiter umgeformt. Die Biegemomente sind durch Integration der Normalspannungen über den Querschnitt definiert und liefern mit Gl. (3)₁

$$\begin{aligned}M_y &= \int_{(\Omega)} \sigma_{xx} \bar{z} \, d\Omega = E (I_{\bar{y}} \beta'_y - I_{\bar{y}\bar{z}} \beta'_z) \\ M_z &= - \int_{(\Omega)} \sigma_{xx} \bar{y} \, d\Omega = E (I_{\bar{z}} \beta'_z - I_{\bar{y}\bar{z}} \beta'_y)\end{aligned}\tag{5}$$

mit den Trägheitsmomenten $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{z}}$ und $I_{\bar{y}\bar{z}}$ bzgl. des Schwerpunktes. Unter Beachtung von $M'_y = Q_z$ und $M'_z = -Q_y$ folgt somit

$$f(y, z) = \frac{1}{D} [(Q_z I_{\bar{z}} - Q_y I_{\bar{y}\bar{z}}) \bar{z} + (Q_y I_{\bar{y}} - Q_z I_{\bar{y}\bar{z}}) \bar{y}]\tag{6}$$

mit $D = I_{\bar{y}} I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2$.

Die Verwölbung $\bar{\varphi}$ ist durch

$$\bar{\varphi} = \varphi + a_0 + a_1 \bar{y} + a_2 \bar{z}\tag{7}$$

definiert, wobei sich die Konstanten a_0 , a_1 und a_2 durch die Bedingungen

$$\int_{(\Omega)} \bar{\varphi} \, d\Omega = 0, \quad \int_{(\Omega)} G \bar{\varphi}_{,y} \, d\Omega = Q_y, \quad \int_{(\Omega)} G \bar{\varphi}_{,z} \, d\Omega = Q_z\tag{8}$$

ergeben. Man erhält

$$a_0 = -\frac{1}{A} \int_{(\Omega)} \varphi \, d\Omega, \quad a_1 = \frac{Q_y}{GA} - \frac{1}{A} \int_{(\Omega)} \varphi_{,y} \, d\Omega, \quad a_2 = \frac{Q_z}{GA} - \frac{1}{A} \int_{(\Omega)} \varphi_{,z} \, d\Omega \quad (9)$$

mit der Querschnittsfläche A des betrachteten Problems.

Die Querkräfte Q_y, Q_z sind gemäß Gl. (8) durch Integration der Schubspannungen

$$\tau_{xy} = G \bar{\varphi}_{,y}, \quad \tau_{xz} = G \bar{\varphi}_{,z} \quad (10)$$

definiert. Dies ist konform mit den konstitutiven Beziehungen Gl. (3).

Weiterhin sind Randbedingungen zu erfüllen. Die Schubspannungen nach Gl. (10) müssen randparallel sein

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \quad (11)$$

Das Randwertproblem ist somit durch eine Poissonsche Differentialgleichung und Neumannsche Randbedingungen definiert

$$\Delta\varphi = \Delta\bar{\varphi} = -\frac{1}{G} f(y, z) \quad \text{in} \quad \Omega, \quad n_y \bar{\varphi}_{,y} + n_z \bar{\varphi}_{,z} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad (12)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = (\cdot)_{,yy} + (\cdot)_{,zz}$. Bedingt durch die nicht berücksichtigte Querdehnung des Stabes in Gl. (1) hebt sich das Verhältnis $E/G = 2(1+\nu)$ mit der Querkontraktionszahl ν heraus.

Die sogenannte schwache Form der Randwertaufgabe Gl. (12) erhält man durch Wichtung der Differentialgleichung mit Testfunktionen $\eta \in \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \{\eta \in H^1(\Omega), \eta = 0 \text{ auf } \partial\Omega_\varphi\}$, wobei $\partial\Omega_\varphi$ der Teil des Randes ist, an dem $\bar{\varphi}$ vorgegeben ist. Integration über das Gebiet Ω liefert

$$G(\varphi, \eta) = - \int_{(\Omega)} \left[\bar{\varphi}_{,yy} + \bar{\varphi}_{,zz} + \frac{1}{G} f(y, z) \right] \eta \, d\Omega = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \quad (13)$$

Partielle Integration und Einsetzen der Randbedingung (12)₂ ergibt

$$G(\varphi, \eta) = \int_{(\Omega)} (\bar{\varphi}_{,y} \eta_{,y} + \bar{\varphi}_{,z} \eta_{,z}) \, d\Omega - \frac{1}{G} \int_{(\Omega)} f(y, z) \eta \, d\Omega = 0 \quad \text{in} \quad \Omega. \quad (14)$$

Es treten nur erste Ableitungen von $\bar{\varphi}$ auf. Damit können C^0 -stetige Elemente für die näherungsweise Lösung mit der Finite-Element-Methode verwendet werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des Problems besteht in der Einführung einer Spannungsfunktion Φ , die die Verträglichkeitsbedingung erfüllt, siehe Weber [5]. Die Schubspannungen ergeben sich durch Ableitung von Φ und man erhält aus dem Gleichgewicht Gl. (4) $\Delta\Phi = -f(y, z)$ mit $\Phi = G \bar{\varphi}$. In [5] wird darauf hingewiesen, daß sich Zusatzschubspannungen durch Querkontraktion des Querschnitts ergeben.

2.2 Koordinaten des Schubmittelpunktes

Der Schubmittelpunkt M ist derjenige geometrische Ort, bezüglich dessen das Torsionsmoment aus den Biegeschubspannungen verschwindet. Damit ergeben sich die Koordinaten $\{y_M, z_M\}$ aus der Bedingung

$$Q_z y_M - Q_y z_M = \int_{(\Omega)} (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) \, d\Omega \quad (15)$$

mit den Schubspannungen aus Querkräften nach (10). Weber weist in [6] darauf hin, daß der Schubmittelpunkt und der Drehpunkt bei reiner Torsion (Drillruhepunkt) identisch sind. Im folgenden wird dies mit den oben beschriebenen Gleichungen gezeigt. Die zugrundeliegende Differentialgleichung und Randbedingung für die Einheitsverwölbung \bar{w} der St.Venantschen Torsion sind, siehe z.B. [10],

$$\Delta \bar{w} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad n_y \bar{w}_{,y} + n_z \bar{w}_{,z} = n_y z - n_z y \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (16)$$

Dazu werden die nachfolgenden Integrale mit Anwendung der Greenschen Formel und Einsetzen von Gl. (16)₁

$$\begin{aligned} - \int_{(\Omega)} \Delta \bar{w} \bar{\varphi} \, d\Omega &= \int_{(\Omega)} (\bar{w}_{,y} \bar{\varphi}_{,y} + \bar{w}_{,z} \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega - \oint_{(\partial\Omega)} (n_y \bar{w}_{,y} + n_z \bar{w}_{,z}) \bar{\varphi} \, ds = 0 \\ - \int_{(\Omega)} (z_{,y} - y_{,z}) \bar{\varphi} \, d\Omega &= \int_{(\Omega)} (z \bar{\varphi}_{,y} - y \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega - \oint_{(\partial\Omega)} (n_y z - n_z y) \bar{\varphi} \, ds = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

eingeführt. Durch Berücksichtigung der Randbedingung Gl. (16)₂ in Gl. (17)₁ folgt

$$\int_{(\Omega)} (\bar{w}_{,y} \bar{\varphi}_{,y} + \bar{w}_{,z} \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega = \int_{(\Omega)} (z \bar{\varphi}_{,y} - y \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega. \quad (18)$$

Damit kann Gl. (15) durch Einsetzen der Schubspannungen Gl. (10) und mit Gl. (18) umgeformt werden in

$$Q_z y_M - Q_y z_M = G \int_{(\Omega)} (y \bar{\varphi}_{,z} - z \bar{\varphi}_{,y}) \, d\Omega = -G \int_{(\Omega)} (\bar{w}_{,y} \bar{\varphi}_{,y} + \bar{w}_{,z} \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega. \quad (19)$$

Einsetzen der Randbedingung Gl. (12)₂, Anwendung der Greenschen Formel sowie Berücksichtigung von Gl. (12)₁ ergibt schließlich

$$\begin{aligned} Q_z y_M - Q_y z_M &= G \left[- \int_{(\Omega)} (\bar{w}_{,y} \bar{\varphi}_{,y} + \bar{w}_{,z} \bar{\varphi}_{,z}) \, d\Omega + \oint_{(\partial\Omega)} (n_y \bar{\varphi}_{,y} + n_z \bar{\varphi}_{,z}) \bar{w} \, ds \right] \\ &= G \int_{(\Omega)} (\bar{\varphi}_{,yy} + \bar{\varphi}_{,zz}) \bar{w} \, d\Omega = - \int_{(\Omega)} f(y, z) \bar{w} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Mit $Q_y = 0$ erhält man die Koordinate y_M bzw. mit $Q_z = 0$ die Koordiante z_M . Unter Verwendung der abkürzenden Schreibweise $A_{ab} = \int_{(\Omega)} ab \, d\Omega$ folgt

$$y_M = - \frac{A_{\bar{w}\bar{z}} A_{\bar{y}\bar{y}} - A_{\bar{w}\bar{y}} A_{\bar{y}\bar{z}}}{A_{\bar{y}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{y}\bar{z}}^2}, \quad z_M = \frac{A_{\bar{w}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{w}\bar{z}} A_{\bar{y}\bar{z}}}{A_{\bar{y}\bar{y}} A_{\bar{z}\bar{z}} - A_{\bar{y}\bar{z}}^2}. \quad (21)$$

Die Koordinaten von M können somit allein aus der Wölbfunktion der St.Venantschen Torsionstheorie prismatischer Stäbe bestimmt werden. Die Kenntnis der Schubspannungen aus Querkräften ist hierfür nicht erforderlich. Für Hauptachsensysteme sind die zu Gl. (21) entsprechenden Formeln von Trefftz [7] unter Verwendung energetischer Kriterien hergeleitet worden. Die Herleitung der Koordinaten des Drillruhepunktes für beliebige Achsensysteme findet man z.B. bei Chwalla [8]. Reissner und Tsai [9] führen Nachgiebigkeitskoeffizienten ein, mit denen für dünnwandige Profile die Koordinaten von M bestimmt werden können.

3 Finite–Element–Formulierung

In diesem Abschnitt werden die zugehörigen Finite–Element–Gleichungen dargestellt. Da die zugrundeliegende Differentialgleichung bis auf die rechte Seite dem in [10] dargestellten Torsionsproblem entspricht, kann die Darstellung hier kurz gehalten werden. Im Rahmen isoparametrischer Elementformulierungen werden für die Koordinaten $\mathbf{x} = [y, z]^T$, die Grundverwölbung φ und die Testfunktionen η die gleichen Ansätze gewählt

$$\mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I, \quad \varphi^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \varphi_I, \quad \eta^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \eta_I. \quad (22)$$

Der Index h kennzeichnet die Näherungslösung der Methode der finiten Elemente. Dabei bezeichnet $nel = 4, 9, 16, \dots$ die Anzahl der Knoten pro Element. Die Ansätze $N_I(\xi, \eta)$ sind Lagrange–Funktionen für isoparametrische Elemente. Durch Einsetzen der Ansatzfunktionen Gl. (22) in die mit φ formulierte schwache Form des Randwertproblems Gl. (14) folgt

$$G(\varphi^h, \eta^h) = \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \eta_I (K_{IK}^e \varphi_K - P_I^e) = 0 \quad (23)$$

mit dem Operator \bigcup für den Zusammenbau und $numel$ der Gesamtanzahl der finiten Elemente zur Berechnung des Problems. Der Beitrag der Steifigkeitsmatrix K_{IK}^e zu den Knoten I und K sowie der rechten Seite P_I^e ergibt

$$K_{IK}^e = \int_{(\Omega_e)} (N_{I,y} N_{K,y} + N_{I,z} N_{K,z}) d\Omega_e, \quad P_I^e = \frac{1}{G} \int_{(\Omega_e)} f(y, z) N_I d\Omega_e \quad (24)$$

mit $f(y, z)$ gemäß Gl. (6).

Die Flächenmomente $A, I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}, I_{\bar{y}\bar{z}}$ und die Schwerpunktskoordinaten y_s, z_s müssen für die vorliegende Berechnung bekannt sein. Dies kann z.B. durch eine FE–Diskretisierung erfolgen, siehe z.B. [10]. Der Zusammenbau der Elementanteile liefert mit Gl. (23) ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Knotenwerte der Querschnittsverwölbung. Weiterhin muß die Randbedingung $\varphi_I = 0$ für einen beliebigen Knotenpunkt I berücksichtigt werden. Die Lösung ergibt die Grundverwölbung φ , welche die Bedingungen Gl. (8) nicht erfüllt. Damit sind die Randbedingungen Gl. (11) verletzt. Dies wird durch $\bar{\varphi}$ nach Gl. (7) korrigiert. Bei symmetrischen Querschnitten ist $\bar{\varphi}$ symmetrisch bei Belastung in Richtung der Symmetrieachse und antimetrisch bei Belastung senkrecht zu ihr.

In [10] wurde auf die adaptive Netzverfeinerung für das Torsionsproblem eingegangen. Die dort beschriebene Berechnung des Verfeinerungsindikators aus den Torsionsschubspannungen kann für das vorliegende Problem vollständig übernommen werden. Auf eine erneute Darstellung wird daher in dieser Arbeit verzichtet.

4 Beispiele

Die vorgestellte Formulierung ist in eine erweiterte Version des Programms FEAP implementiert. Eine Dokumentation der Basisversion findet sich im Buch von Zienkiewicz und Taylor [11]. Bei den nachfolgenden Beispielen ergeben sich an den einspringenden Ecken ohne Ausrundungen Singularitäten. Die dargestellten Spannungsplots stellen somit die Ergebnisse jeweils für ein gewähltes Netz dar. Bei weiteren Verfeinerungen verändern sich die Spannungen *in unmittelbarer Nähe* der Ecken.

4.1 Rechteckquerschnitt

Als erstes Beispiel wird ein Rechteckquerschnitt nach Bild 2 mit Breite $b = 10\text{ cm}$ und Höhe $h = 20\text{ cm}$ betrachtet. Unter Ausnutzung der Symmetrie wird ein Viertel des Querschnitts durch $2 \times n$ Elemente mit $n = 2, 5, 10$ diskretisiert. Die theoretische Schubspannungsverteilung für eine Querkraft $Q_z = 1\text{ kN}$ im Rahmen der Stabtheorie ist die quadratische Parabel $\tau_{xz} = \tau_{max}[1 - (2z/h)^2]$ mit $\tau_{max} = 3Q_z/(2A) = 7,5 \cdot 10^{-3}\text{ kN/cm}^2$. Es ergeben sich eine Finite-Element-Lösung von $\tau_{xy} = 0$ und konstante Schubspannungen τ_{xz} in y -Richtung. Der Verlauf von τ_{xz} im Bereich $0 \leq z \leq h/2$ ist für die verschiedenen Netze im Vergleich zur theoretischen Lösung in Bild 2 dargestellt. Bereits bei $n = 5$ Elementen ist praktisch Übereinstimmung mit der theoretischen Lösung gegeben.

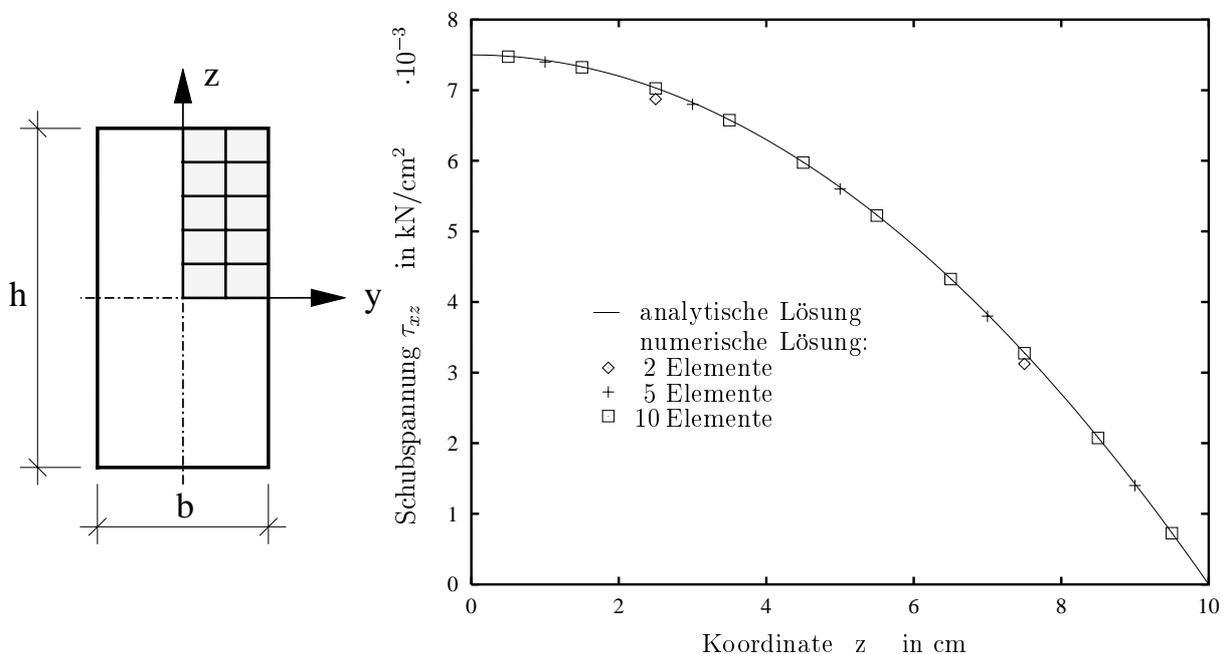


Bild 2: Schubspannungsverteilung für Rechteckquerschnitt – Fig. 2. Shear stresses of rectangular cross-section

4.2 Abgesetzter Rechteckquerschnitt

Für den in Bild 3 dargestellten abgesetzten Rechteckquerschnitt wird die Schubspannungsverteilung für die Querkraft $Q_z = -1kN$ berechnet. Die Geometriedaten sind $a = 10\text{ cm}$, $z_S = 5/3 a$ und $z_M = 1,445 a$. Die Diskretisierung erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie für den halben Querschnitt. Der Schubfluß in Höhe des Schwerpunkts ergibt sich als Resultierende der Schubspannungen entlang der Linie $a - a$ zu $t_z = \int_{-2a}^{2a} \tau_{xz} dy$. Eine numerische Integration unter Anwendung der Simpsonregel liefert $t_z = -37,8 \cdot 10^{-3} kN/cm$. Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem Ergebnis der Stabtheorie nach der sogenannten Dübelformel

$$t_z(x, z) = -\frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_{\bar{y}}} = -37,9 \cdot 10^{-3} kN/cm$$

überein. Es wird hier noch einmal betont, daß die entkoppelte Berechnung von Größen in Richtung der Stabachse und in der Querschnittsebene nur für konstante Querschnitte längs der Stabachse gilt. Bild 4 zeigt einen Konturplot der Schubspannung τ_{xz} . Die Verteilung von τ_{xz} in y -Richtung weicht deutlich vom konstanten Verlauf ab. Der Größtwert entlang der Symmetrieachse tritt oberhalb des Dickensprungs auf. Bei weiterer Netzverfeinerung erkennt man in den einspringenden Ecken Singularitäten. Weiterhin sind in Bild 5 die resultierenden Schubspannungen dargestellt.

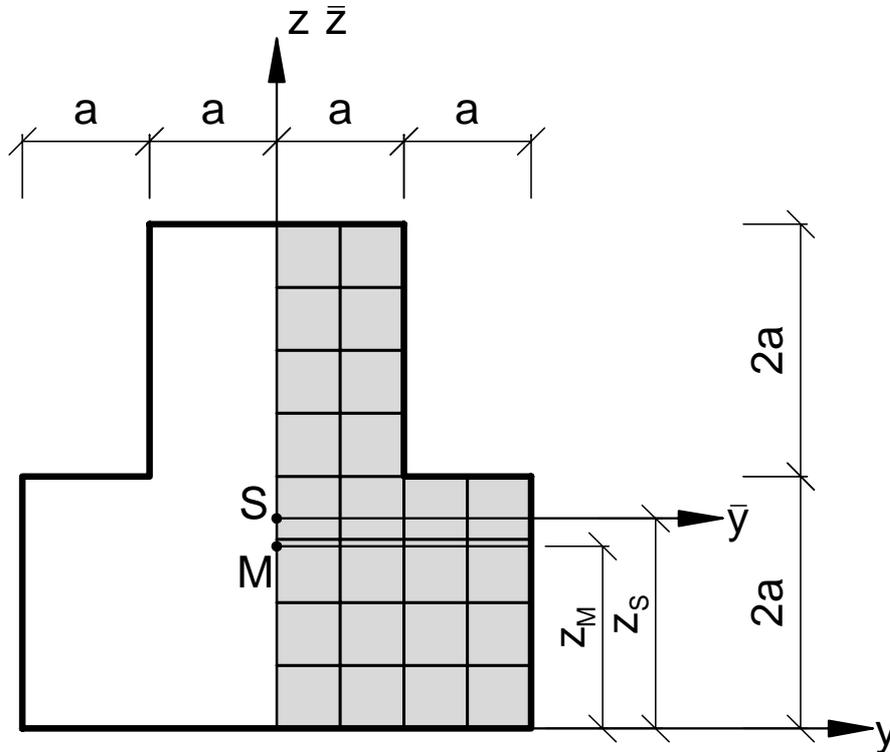


Bild 3: Abgesetzter Rechteckquerschnitt – Fig. 3. Cross-section with varying width

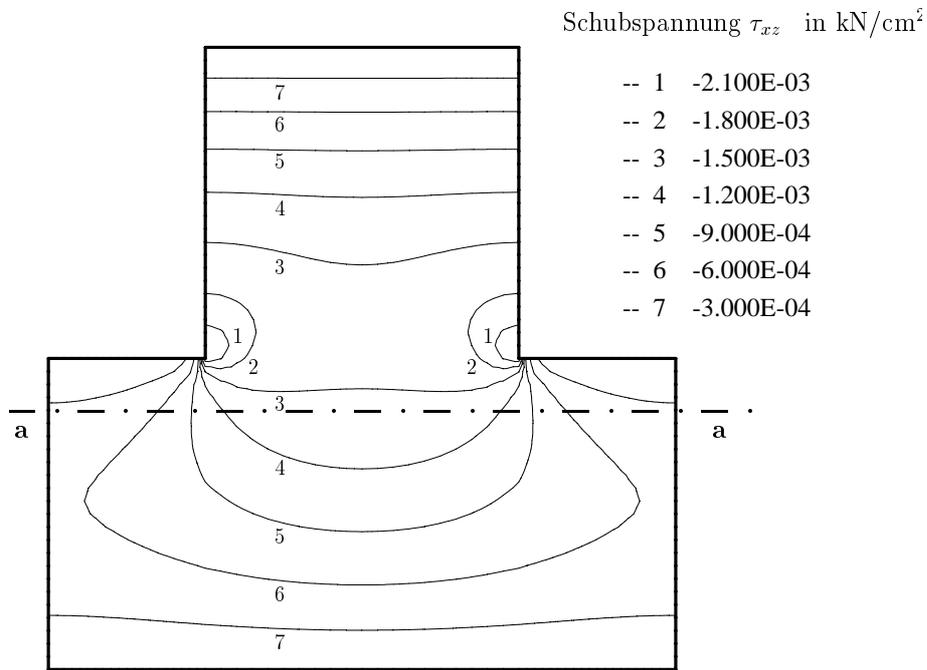


Bild 4: Plot der Schubspannungen τ_{xz} – Fig. 4. Plot of shear stresses τ_{xz}

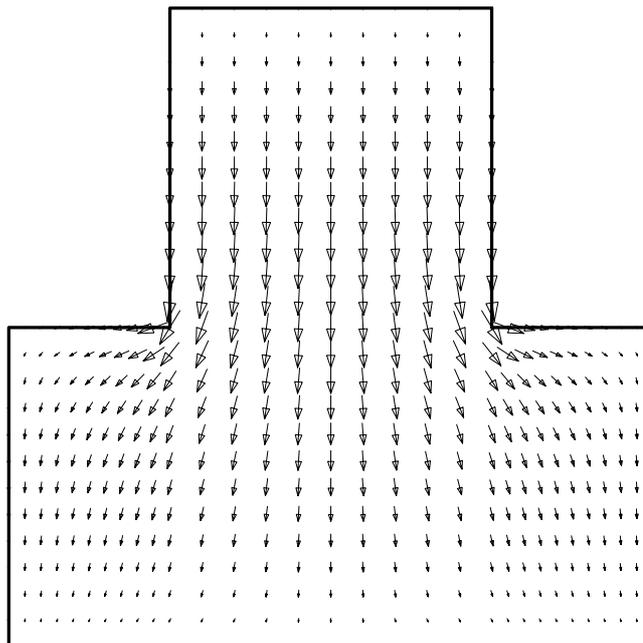


Bild 5: Resultierende Schubspannungen – Fig. 5. Resulting shear stresses

4.3 Kranschiene A 100 nach DIN 536

Als nächstes Beispiel wird der Querschnitt einer Kranschiene A100 nach DIN 536 (9.91) untersucht. Die Berechnung erfolgt aus Symmetriegründen am halben Querschnitt. Der Querschnitt mit einer adaptiven Verfeinerung ist in Bild 6 dargestellt. Mit $Q_z = 0$ wird aus Gl. (15) die Schubmittelpunktskoordinate $z_M = 3,252 \text{ cm}$ ermittelt. Dieser Wert wurde ebenfalls in [10] nach Gl. (21) aus der Torsionsverwölbung berechnet. Es kommt zu einer deutlichen Spannungskonzentration, siehe Bild 7. Es muß jedoch betont werden, daß sich die vorliegenden Ergebnisse mit der behinderten Querdehnung gemäß Gl. (1) ergeben. Mit einer zugelassenen Querdehnung ergeben sich Zusatzschubspannungen, die hier jedoch nicht betrachtet werden sollen. Die Plots der resultierenden Schubspannungen sind für Q_z in Bild 8 und für Q_y in Bild 9 dargestellt.

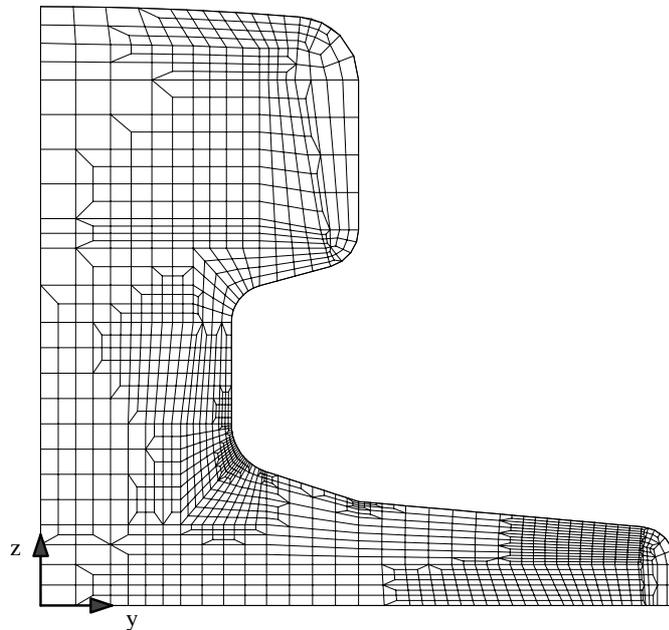


Bild 6: Diskretisierung einer Kranschiene A100 – Fig. 6. Discretization of a crane rail A100

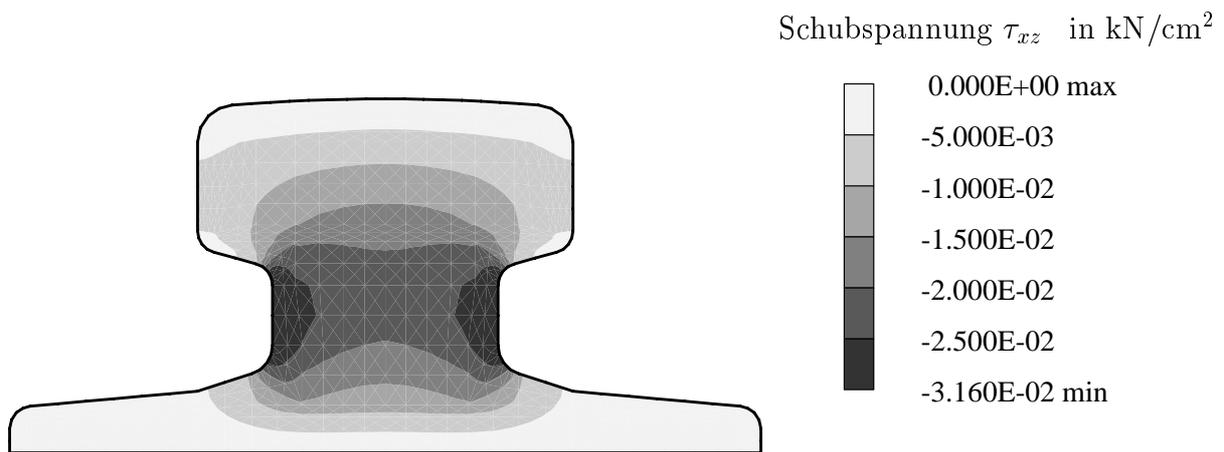


Bild 7: Schubspannungen der Kranschiene A100 für $Q_z = -1 \text{ kN}$ – Fig. 7. Shear stresses of crane rail A100 for $Q_z = -1 \text{ kN}$

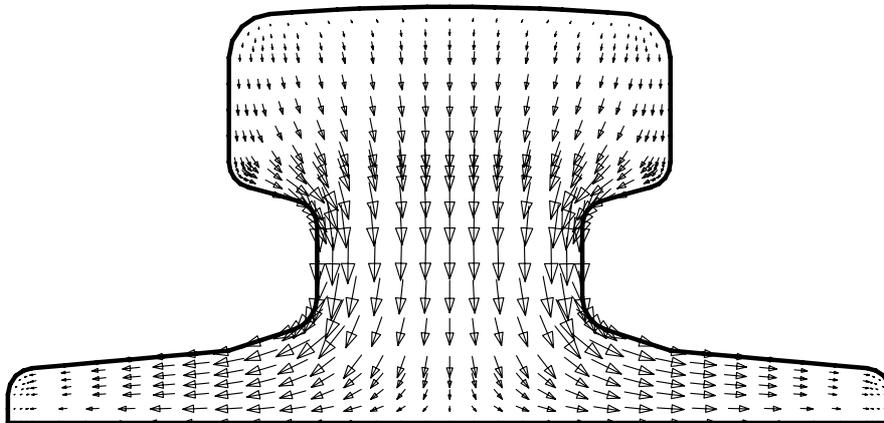


Bild 8: Plot der resultierenden Schubspannungen der Kranschiene A100 für $Q_z = -1 \text{ kN}$
 Fig. 8. Plot of the resulting shear stresses of crane rail A100 for $Q_z = -1 \text{ kN}$

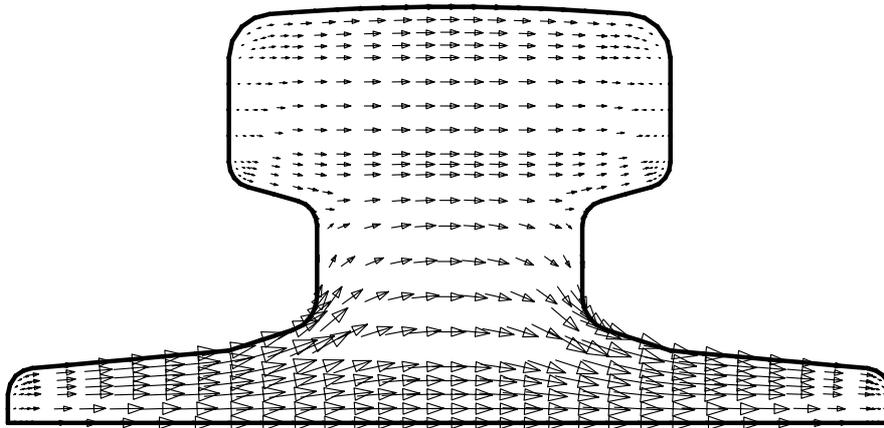


Bild 9: Plot der resultierenden Schubspannungen der Kranschiene A100 für $Q_y = 1\text{ kN}$
Fig. 9. Plot of the resulting shear stresses of crane rail A100 for $Q_y = 1\text{ kN}$

4.4 Hohlkastenquerschnitt

Als letztes Beispiel wird ein Brückenquerschnitt gemäß Bild 10 betrachtet, siehe auch [3]. Die Abmessungen sind in m angegeben. Mit $Q_z = 0$ wird aus Gl. (15) die Schubmittelpunktskoordinate $z_M = 1,569 m$ berechnet. Dieser Wert wurde ebenfalls in [10] nach Gl. (21) aus der Torsionsverwölbung berechnet. Die resultierenden Schubspannungen sind für Q_y in Bild 11 und für Q_z in Bild 12 dargestellt. Die qualitative Aufteilung des Schubflusses an den Verzweigungen ist deutlich zu sehen.

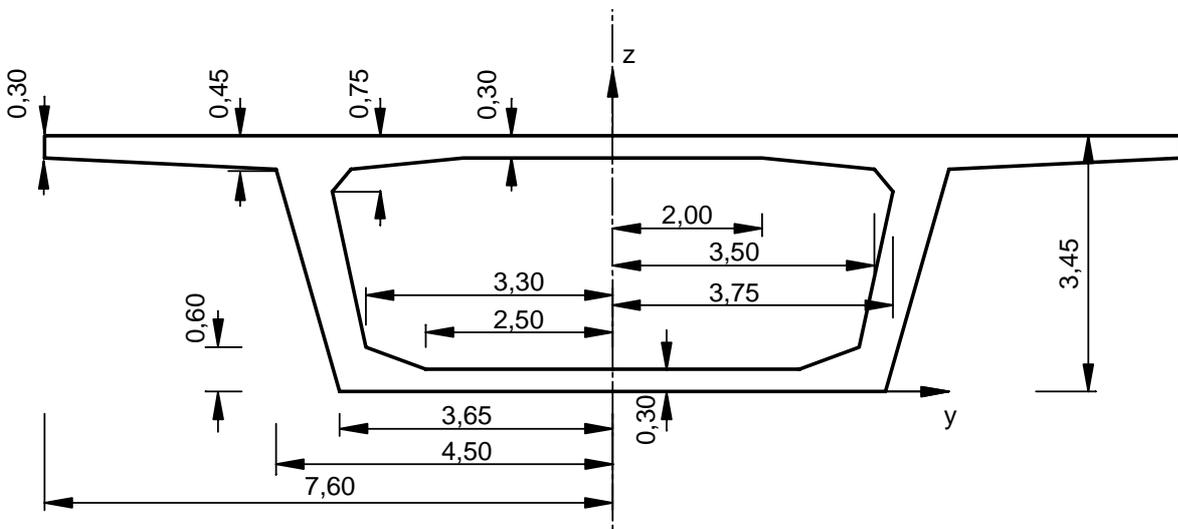


Bild 10: Hohlkastenquerschnitt – Fig. 10. Closed cross-section

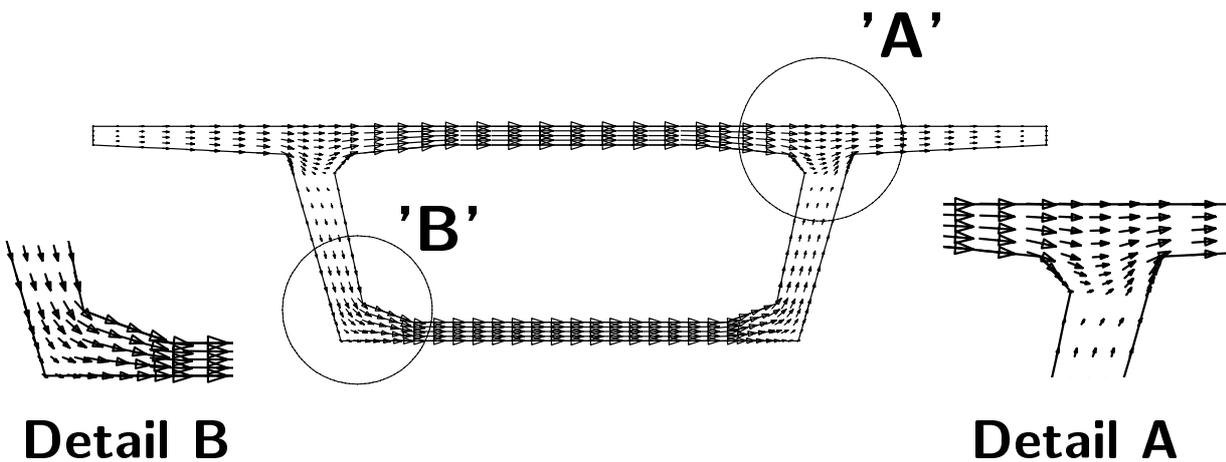


Bild 11: Plot der resultierenden Schubspannungen für den Kastenquerschnitt für $Q_y = 1 kN$
 Fig. 11. Plot of the resulting shear stresses of closed cross-section for $Q_y = 1 kN$

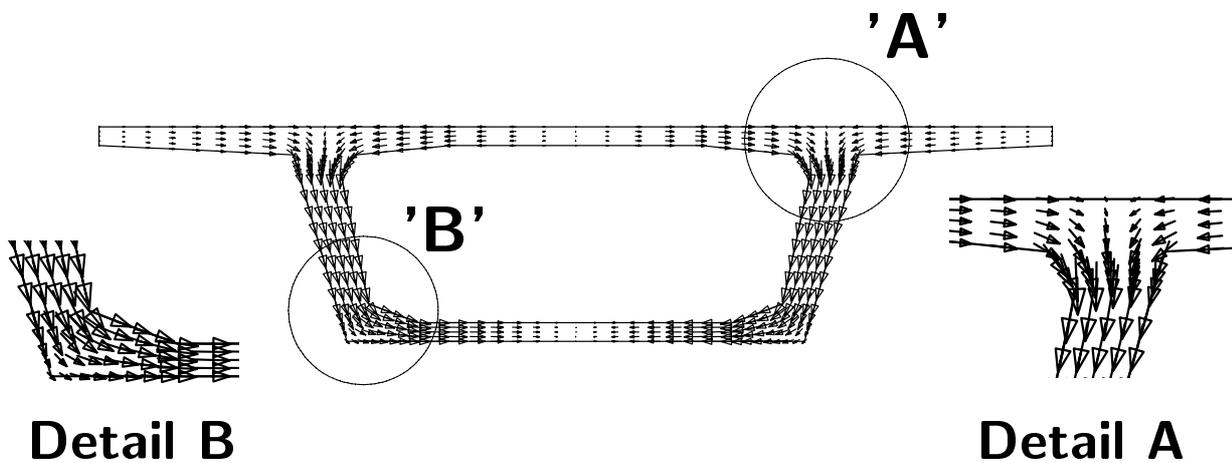


Bild 12: Plot der resultierenden Schubspannungen für den Kastenquerschnitt für $Q_z = -1 \text{ kN}$
 Fig. 12. Plot of the resulting shear stresses of closed cross-section for $Q_z = -1 \text{ kN}$

5 Schlußfolgerungen

Zur Berechnung der Schubspannungen in beliebigen Querschnitten wird die übliche Stabkinematik um die Querschnittsverwölbung erweitert. Die Annahme der Unausdehnbarkeit quer zur Stabrichtung wird beibehalten. Damit sind die daraus folgenden Gleichungen unabhängig von der Querkontraktionszahl. Für das resultierende Randwertproblem wird die schwache Form hergeleitet. Darauf aufbauend werden Finite-Element-Gleichungen dargestellt, die es erlauben, beliebige Querschnittsformen zu behandeln.

Es wird theoretisch und auch anhand von Beispielen gezeigt, daß die Koordinaten des Schubmittelpunktes aus den Querkraftschubspannungen oder durch die Torsionsverwölbung berechnet werden können. Mit dem Verfahren lassen sich die Schubspannungen aus Querkraft in offenen und geschlossenen Querschnitten berechnen. Die Querschnittsteile können dünn- oder dickwandig sein.

Literatur

- [1] **Bornscheuer, F.W.:** Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21(1) (1952) 1–9 [1](#)
- [2] **Mason, W.E.; Herrmann, L.R.:** Elastic Shear Analysis of General Prismatic Beams. J. Eng. Mech. Div., ASCE 94, EM 4 (1968) 965–983 [1](#)
- [3] **Zeller, C.:** Eine Finite-Element-Methode zur Berechnung der Verwölbungen und Profilverformungen von Stäben mit beliebiger Querschnittsform. Techn.-wiss. Mitt. 79–7, Inst. f. konstr. Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum 1979 [1](#), [4.4](#)
- [4] **Zeller, C.:** Querschnittsverformungen von Stäben. Ingenieur-Archiv 52 (1982) 17–37 [1](#)
- [5] **Weber, C.:** Biegung und Schub in geraden Balken. ZAMM 4 (1924) 334–348 [2.1](#)
- [6] **Weber, C.:** Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. ZAMM 6 (1926) 85–97 [2.2](#)
- [7] **Treffitz, E.:** Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. ZAMM 15 (1935) 220–225 [2.2](#)
- [8] **Chwalla, E.:** Einführung in die Baustatik. 2. Auflage Köln Stahlbau-Verlag 1954 [2.2](#)
- [9] **Reissner, E.; Tsai, W.T.:** On the Determination of the Centers of Twist and of Shear for Cylindrical Shell Beams. J. Appl. Mechanics 39 (1972) 1098–1102 [2.2](#)
- [10] **Gruttmann, F.; Wagner, W.; Sauer, R.:** Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente. Bauingenieur 73(3) (1998) 138–143 [2.2](#), [3](#), [3](#), [4.3](#), [4.4](#)
- [11] **Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.:** The Finite Element Method. Band 2, 4. Auflage London McGraw-Hill 1989

F. Gruttmann, W. Wagner, R. Sauer,
Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH),
Kaiserstraße 12
78131 Karlsruhe

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Friedrich Gruttmann ist Ordinarius am Institut für Statik der Technischen Universität Darmstadt, Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner ist Ordinarius und Dipl.-Ing. Roland Sauer ist wiss. Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.