

**St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe
mit elastoplastischem Werkstoffverhalten**

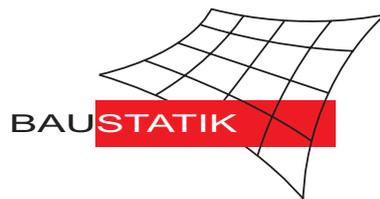
F. Gruttmann, W. Wagner

Mitteilung 4(1999)

St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe mit elastoplastischem Werkstoffverhalten

F. Gruttmann, W. Wagner

Mitteilung 4(1999)



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner Telefon: (0721) 608-2280
Institut für Baustatik Telefax: (0721) 608-6015
Universität Karlsruhe E-mail: bs@uni-karlsruhe.de
Postfach 6980 Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>
76128 Karlsruhe

St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe mit elastoplastischem Werkstoffverhalten

Herrn Prof. Dr.–Ing. R. Schardt zum 70. Geburtstag gewidmet

F. Gruttmann, W. Wagner

Zusammenfassung Die vorliegende Arbeit behandelt die Torsion prismatischer Stäbe ohne Wölbbehinderung unter Berücksichtigung eines elastoplastischen Materialverhaltens. Auf Grundlage der dargestellten Variationsformulierung werden zugehörige isoparametrische finite Elemente entwickelt. Die elastoplastische Spannungsberechnung erfolgt mit einem Projektionsverfahren durch eine einfache Skalierung des Vektors der Versuchsspannungen. Als Ergebnis folgt das vollplastische Torsionsmoment und daraus die elastoplastische Querschnittsreserve. Die betrachteten Gebiete können einfach oder mehrfach zusammenhängend und im übrigen beliebig sein.

St.Venant torsion of prismatic beams considering elastic–plastic material behaviour

Abstract In this paper torsion of prismatic beams without warping restrictions considering inelastic material behaviour is studied. Based on the presented variational formulation associated isoparametric finite elements are developed. The elastic–plastic stresses are obtained within a projection method simply by scaling the vector of trial stresses. The computation yields the fully plastic torsion moment and thus the elastic–plastic reserve of the cross–section. The arbitrary shaped domains may be simply or multiple connected.

1 Einleitung

Die St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe wird in verschiedenen Lehrbüchern behandelt, siehe z.B. Petersen [1], Lubliner [2] und weitere dort zitierte Arbeiten. Für elastisches Werkstoffverhalten ist das Randwertproblem im Rahmen einer Verschiebungsmethode durch eine Laplacegleichung und Neumannsche Randbedingungen beschrieben. Diese Darstellung ist besonders für eine näherungsweise Lösung mit der FE–Methode geeignet, siehe z.B. [3]. Der entscheidende Vorteil ergibt sich bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten. In diesem Fall müssen Kontinuitätsbedingungen an den Lochrändern erfüllt werden. Durch Diskretisierung der Wölbfunktion sind diese automatisch erfüllt. Bei der üblicherweise verwendeten Spannungsfunktion bereiten die zu erfüllenden Nebenbedingungen jedoch Schwierigkeiten.

Yamada et al. [4] berücksichtigen elastoplastisches Materialverhalten bei den durchgeführten FE–Berechnungen. Die Autoren entwickeln finite Dreieckselemente im Rahmen einer hybriden Spannungsmethode. In einer weiteren Arbeit von Baba und Kajita [5] werden neben den Schubspannungen auch die Stablängsspannungen einbezogen und dafür finite Rechteckelemente entwickelt. Die von Nadai [6] aufgestellte Sandhügel–Analogie zur Berechnung des vollplastischen Torsionsmoments kann vorteilhaft für eine qualitative Kontrolle des vollplastischen Grenzzustandes verwendet werden. Danach wird über der

Querschnittsfläche ein Sandhügel aufgeschichtet. Bei einem konvexen Polygon als Querschnittsfläche entsteht ein Sandkörper mit geradlinigen Graten. Die konstante Neigung der Seitenflächen entspricht dem Betrag des Schubspannungsvektors. Für Teilplastizierung führt die Kombination der Membran–Analogie mit der Sandhügel–Analogie zu entsprechenden Lösungen.

Die vorliegende Arbeit stellt in Erweiterung von [3] zeitgemäße Darstellungen für eine effiziente numerische Berechnung der elastoplastischen Torsion bereit. Insbesondere die Anwendung des Euler–Rückwärts–Verfahrens führt auf unbedingt stabile Zeitintegrationsverfahren, die im Vergleich zu den in [4] und [5] verwendeten expliziten Verfahren größere Zeitschritte erlauben und damit wesentlich effektiver sind. In dem vorliegenden Fall kann bei Annahme linearer isotroper Verfestigung die elastoplastische Spannungsrechnung durch eine einfache Skalierung der sogenannten Versuchsspannungen erfolgen. Damit sind Iterationen in den Integrationpunkten der Elemente nicht erforderlich. Weiterhin werden mit den hier verwendeten isoparametrischen Elementen die Einschränkungen von Rechteckelementen [5] und das relativ steife Verhalten von Dreieckselementen [4] überwunden. Die entwickelte FE–Formulierung liefert u.a. das vollplastische Torsionsmoment für beliebige Querschnittsformen. Diese Querschnittsgröße wird z.B. für Interaktionsbeziehungen im Rahmen von Traglastberechnungen räumlich beanspruchter Stäbe benötigt, [2].

2 St.Venantsche Torsion prismatischer Stäbe

Es wird ein prismatischer Stab mit Stabachse x und Querschnittsachsen y, z , die nicht Hauptachsen sein müssen, betrachtet. Der Koordinatenursprung ist ein beliebiger Punkt des Querschnitts, siehe Bild 1. Das Gebiet Ω mit Rändern $\partial\Omega$ kann einfach oder mehrfach zusammenhängend sein. Auf $\partial\Omega$ wird das rechtshändige orthonormale Basissystem, bestehend aus dem Tangentenvektor \mathbf{t} und dem nach außen gerichteten Normalenvektor $\mathbf{n} = [n_y, n_z]^T$, definiert. Dadurch ist mit \mathbf{t} die Richtung der zugehörigen Randkoordinate s an Außen– und Innenrändern eindeutig definiert.

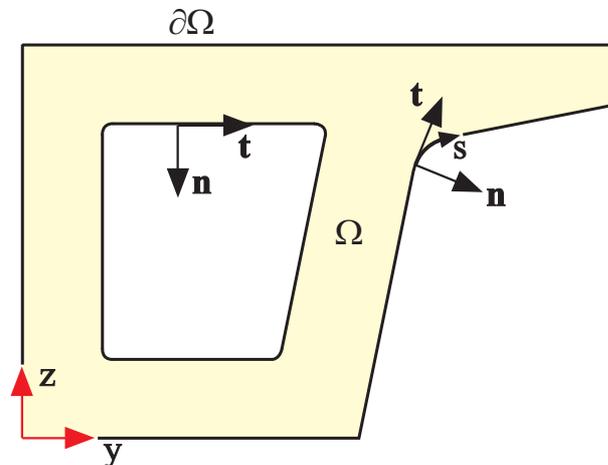


Bild 1: Bezeichnungen für eine Querschnittsfläche.

Fig. 1. Notation of a cross–section

Der Stab wird einem Torsionsmoment M_T mit konstanter Verdrillung α unterworfen. Der

Verdrehwinkel $\chi = \alpha x$ soll dabei klein sein. Für das Verschiebungsfeld wird im Rahmen der Torsionstheorie der übliche Ansatz

$$u_x = \alpha w \quad u_y = -\alpha xz \quad u_z = \alpha xy \quad (1)$$

mit der Wölbfunktion $w(y, z)$ gewählt. Mit $\alpha = \text{konstant}$ wird angenommen, daß sich alle Querschnitte unabhängig von x verwölben. Es läßt sich leicht zeigen, daß bei dickwandigen Querschnitten nur Kreis- und Kreisringquerschnitte wölbfrei sind, d.h. $w(x, y) \equiv 0$, siehe z.B. [2].

Die Gleitungen ergeben sich in einer geometrisch linearen Theorie zu

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} w_{,y} - z \\ w_{,z} + y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

wobei partielle Ableitungen durch Kommas gekennzeichnet sind. Die übrigen Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$ sind identisch Null.

Im Rahmen der St.Venantschen Torsionstheorie wird angenommen, daß die Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und die Schubspannungen τ_{xy} verschwinden. Weiterhin müssen Randbedingungen erfüllt werden. Der prismatische Stab ist an den Seitenflächen spannungsfrei. Der Vektor der Schubspannungen $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{xy}, \tau_{xz}]^T$ muß damit am Rand orthogonal zum Normalenvektor \mathbf{n} sein. Dies wird durch die Plots der resultierenden Schubspannungen in Abschnitt 5 verdeutlicht. Die Randwertaufgabe ist somit bei Vernachlässigung von Volumenkräften wie folgt beschrieben, siehe auch [3]

$$\tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{n} = \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3)$$

Die zugehörige schwache Form erhält man durch Wichtung der Differentialgleichung (3)₁ mit Testfunktionen $\delta w \in \mathcal{V}$ aus

$$\mathcal{V} = \{\delta w \in H^1(\Omega), \delta w = 0 \text{ auf } \partial\Omega_w\}. \quad (4)$$

Hierin ist $\partial\Omega_w$ der Teil des Randes, an dem w vorgegeben ist. Integration über das Gebiet Ω ergibt

$$g(w, \delta w) = - \int_{(\Omega)} (\tau_{xy,y} + \tau_{xz,z}) \delta w \, dA = 0. \quad (5)$$

Durch partielle Integration erhält man

$$g(w, \delta w) = \int_{(\Omega)} (\tau_{xy} \delta w_{,y} + \tau_{xz} \delta w_{,z}) \, dA - \int_{(\partial\Omega)} (\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \delta w \, ds = 0, \quad (6)$$

wobei das Randintegral bei Beachtung von Gl. (3)₂ verschwindet.

Gl. (6) wird in Zusammenhang mit der elastoplastischen Spannungsberechnung des folgenden Abschnitts nichtlinear. Für die iterative Lösung mit dem Newton-Verfahren wird die Linearisierung benötigt. Man erhält

$$L[g(w, \delta w)] = g(w, \delta w) + Dg(w, \delta w) \cdot \Delta w = \int_{(\Omega)} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \Delta \boldsymbol{\gamma} \right) \, dA \quad (7)$$

mit

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \alpha \begin{bmatrix} \delta w_{,y} \\ \delta w_{,z} \end{bmatrix} \quad \Delta \boldsymbol{\gamma} = \alpha \begin{bmatrix} \Delta w_{,y} \\ \Delta w_{,z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

dem variierten bzw. linearisierten Verzerrungsvektor.

3 Elastoplastische Spannungsberechnung

Im folgenden wird elastoplastisches Werkstoffverhalten mit v.Mises–Fließbedingung, Dehnungsverfestigung und assoziierter Fließregel angenommen.

Bei Annahme kleiner Verzerrungen können die Gleitungen additiv zerlegt werden

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{el} + \boldsymbol{\gamma}^{pl}. \quad (9)$$

Für den elastischen Anteil gilt das linear–elastische Stoffgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = G \boldsymbol{\gamma}^{el} \quad (10)$$

mit dem Schubmodul G .

Die Fließbedingung nach v.Mises mit linearer isotroper Verfestigung lautet

$$F(\boldsymbol{\tau}, e^v) = |\boldsymbol{\tau}| - k(e^v) \leq 0. \quad (11)$$

Dabei ist

$$k(e^v) = k_0 + \xi e^v \quad k_0 = \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} =: \tau_F \quad (12)$$

mit der Fließspannung σ_F , dem plastischen Tangentenmodul ξ und der plastischen Vergleichsdehnung e^v . Die Fließfläche Gl. (11) beschreibt einen Kreis mit dem Radius $R = k(e^v)$. Die isotrope Verfestigung bewirkt somit eine Vergrößerung des Halbmessers. Die assoziierte Fließregel sowie die Entwicklungsregel für die plastischen Vergleichsdehnungen lauten

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad \dot{e}^v = |\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{pl}| = \dot{\lambda}. \quad (13)$$

In (13) müssen die Be- und Entlastungsbedingungen erfüllt sein:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad F(\boldsymbol{\tau}, e^v) \leq 0 \quad \dot{\lambda} F = 0. \quad (14)$$

Zur näherungsweisen Zeitintegration der plastischen Verzerrungsraten wird das Euler–Rückwärts–Verfahren angewendet. Innerhalb eines Zeitschritts $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ folgt

$$\boldsymbol{\gamma}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\gamma}_n^{pl} + \lambda \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}}{|\boldsymbol{\tau}_{n+1}|} \quad e_{n+1}^v = e_n^v + \lambda \quad (15)$$

mit $\lambda := \Delta t \dot{\lambda}_{n+1}$, $\boldsymbol{\gamma}_n^{pl} = \boldsymbol{\gamma}^{pl}(t_n)$ und $e_n^v = e^v(t_n)$.

Im Belastungsfall erhält man die Schubspannungen zum Zeitpunkt t_{n+1} durch Einsetzen der Gln. (10) und (15)₁ in Gl. (9). Es folgt $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ durch Skalierung des Vektors der Versuchsspannungen

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} := G(\boldsymbol{\gamma}_{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_n^{pl}) \quad (16)$$

mit dem Faktor β , also $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \beta \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}$. Damit gilt mit $k_{n+1} = k(e_{n+1}^v)$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = k_{n+1} \mathbf{N} \quad \mathbf{N} := \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}}{|\boldsymbol{\tau}_{n+1}|} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}}{|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}|}. \quad (17)$$

Der Konsistenzparameter λ ergibt sich durch Erfüllung der Fließbedingung (11) zum Zeitpunkt t_{n+1} .

Für das linearisierte Randwertproblem Gl. (7) ist die konsistente Linearisierung des Spannungsvektors herzuleiten, siehe z.B. Stein et al. [7] für ebene Spannungszustände. Man erhält nach einiger Rechnung

$$\mathbf{C}_T := \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = G (\beta \mathbf{1} - \bar{\beta} \mathbf{N} \mathbf{N}^T). \quad (18)$$

Die Berechnung der Faktoren β und $\bar{\beta}$ sowie der Ablauf der elastoplastischen Spannungsberechnung ist in Gl. (19) zusammengefaßt. Der Algorithmus erfordert die Speicherung der plastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\gamma}_n^{pl}$ und der plastischen Vergleichsdehnungen e_n^v .

<p>Versuchsspannungen</p> $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} = G (\boldsymbol{\gamma}_{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_n^{pl})$		
<p>Fließbedingung</p> $k_n = k_0 + \xi e_n^v$ $F = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} - k_n$		
<p>Spannungen und konsistente Tangente</p>		
<p>falls $F \leq 0$</p> $\lambda = 0$ $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}$ $\mathbf{C}_T = G \mathbf{1}$	<p>falls $F > 0$</p> $\lambda = \frac{ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} - k_n}{G + \xi}$ $k_{n+1} = k_n + \lambda \xi$ $\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}}{ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} }$ $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = k_{n+1} \mathbf{N}$ $\beta = \frac{k_{n+1}}{ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} }$ $\bar{\beta} = \beta - \frac{\xi}{G + \xi}$ $\mathbf{C}_T = G (\beta \mathbf{1} - \bar{\beta} \mathbf{N} \mathbf{N}^T)$	(19)
<p>Plastische Verzerrungen und Vergleichsdehnungen</p> $\boldsymbol{\gamma}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\gamma}_n^{pl} + \lambda \mathbf{N}$ $e_{n+1}^v = e_n^v + \lambda$		

4 Finite-Element-Formulierung

Die linearisierte schwache Form des Randwertproblems kann näherungsweise mit der Methode der finiten Elemente gelöst werden. Dazu werden die Koordinaten $\mathbf{x} = [y, z]^T$, die

Inkrementen der Wölbfunktion Δw und die Testfunktionen δw wie folgt approximiert

$$\mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{x}_I, \quad \alpha \Delta w^h = \sum_{K=1}^{nel} N_K \Delta w_K, \quad \alpha \delta w^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \delta w_I. \quad (20)$$

Der Index h kennzeichnet die Näherungslösung der FE-Methode. Weiterhin bezeichnet $nel = 4, 9, 16, \dots$ die Anzahl der Knoten pro Element. Die Ansätze $N_I = N_I(\xi, \eta)$ sind Lagrange-Funktionen für isoparametrische Elemente. Die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_I(\xi, \eta)$ nach den Koordinaten y und z werden auf übliche Weise unter Beachtung der Kettenregel gewonnen.

Die Variation und Linearisierung der Verzerrungen liefert gemäß Gl. (8)

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\gamma}^h &= \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta w_I & \Delta \boldsymbol{\gamma}^h &= \sum_{K=1}^{nel} \mathbf{B}_K \Delta w_K \\ \mathbf{B}_I &= \begin{bmatrix} N_{I,y} \\ N_{I,z} \end{bmatrix} & \mathbf{B}_K &= \begin{bmatrix} N_{K,y} \\ N_{K,z} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Einsetzen von Gl. (21) in die linearisierte Randwertaufgabe Gl. (7) erhält man

$$L[g(w^h, \delta w^h)] = \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta w_I (f_I^e + K_{IK}^e \Delta w_K) = 0. \quad (22)$$

Der Operator \bigcup beschreibt den Zusammenbau mit $numel$ als Gesamtanzahl der finiten Elemente zur Berechnung des Problems. Der Beitrag der Steifigkeitsmatrix K_{IK}^e zu den Knoten I und K sowie der rechten Seite f_I^e ergibt

$$f_I^e = \int_{(\Omega_e)} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\tau} \, dA \quad K_{IK}^e = \int_{(\Omega_e)} \mathbf{B}_I^T \mathbf{C}_T \mathbf{B}_K \, dA. \quad (23)$$

Hierin gehen die Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}$ und die Matrix \mathbf{C}_T gemäß Gl. (19) ein.

Nach dem Zusammenbau der Elementanteile liefert Gl. (22) ein lineares Gleichungssystem mit den unbekanntem Wölbordinaten Δw_K . Zur Lösung muß die Randbedingung $\Delta w_I = 0$ für einen beliebigen Knotenpunkt I berücksichtigt werden. Durch die Wahl eines anderen Knotenpunkts werden lediglich alle Knotenwerte um eine Konstante verändert. Bei der Berechnung der Ableitungen für die Verzerrungen ist diese jedoch unerheblich. Die Knotenwerte der Wölbfunktion w_I ergeben sich dann durch Addition der Inkremente im Newton-Verfahren.

Mit der Wölbfunktion $\alpha w^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I w_I$ liegen auch die Schubspannungen vor. Damit kann das Torsionsmoment durch Integration über den Querschnitt

$$M_T = \int_{(\Omega)} (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) \, dA \quad (24)$$

berechnet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Spannungsverteilung keine Singularitäten aufweist, ist M_T^{el} dasjenige Moment, bei dem ein oder mehrere Punkte des Querschnitts gerade zu plastizieren beginnen. Weiterhin ist M_T^{pl} das vollplastische Torsionsmoment, bei dem der Querschnitt vollständig plastiziert ist. Damit kann das Verhältnis $\kappa = M_T^{pl}/M_T^{el} \geq 1$ als ein Formbeiwert berechnet werden.

Vorhandene Symmetrien können bei der Diskretisierung berücksichtigt werden. Auf den Symmetrieachsen ist die Wölbfunktion jeweils Null. In [3] werden für den elastischen Fall aus der Grundverwölbung die Einheits- und Hauptverwölbung berechnet. Bei elastoplastischem Materialverhalten können die gleichen Transformationen durchgeführt werden.

5 Beispiele

Die dargestellte Elementformulierung ist in eine erweiterte Version des Programms FEAP implementiert. Die Basisversion ist im Buch von Zienkiewicz und Taylor [8] dokumentiert. Zur Überprüfung der Implementierung werden nachfolgend die berechneten FE-Ergebnisse analytischen Lösungen aus der Literatur für einfache Querschnittsformen gegenübergestellt. Dies sind Rechteck- und Kreisquerschnitt. Die verfügbaren analytischen Vergleichslösungen sind dem Lehrbuch von Lubliner [2] entnommen. Weiterhin wird das Tragverhalten eines Walzprofils und eines dickwandigen Hohlquerschnitts unter Torsion bei elastoplastischem Materialverhalten untersucht. Die Materialdaten werden für alle Beispiele mit

$$G = 81000 \text{ kN/cm}^2 \quad \sigma_F = 24 \text{ kN/cm}^2 \quad \xi = 0 \quad (25)$$

gleich gewählt. Als Bezugsgröße in den Tabellen und Diagrammen wird jeweils der theoretische Wert für M_T^{el} verwendet. Bei den Beispielen, für die keine theoretische Lösung vorliegt, wird der Wert des feinsten Finite-Element-Netzes herangezogen. Im folgenden werden die Endzustände der FE-Berechnung als vollplastische Zustände bezeichnet.

5.1 Rechteckquerschnitt

Als erstes Beispiel wird ein Rechteckquerschnitt mit Kantenlängen $a = 5 \text{ cm}$ und $b = 10 \text{ cm}$ untersucht. Die analytische Lösungen für M_T^{el} und M_T^{pl} lauten

$$\begin{aligned} M_T^{el} &= 0.246 \tau_F b a^2 &= 852.2 \text{ kNcm} \\ M_T^{pl} &= \frac{1}{6} \tau_F a^2 (3b - a) &= 1443.4 \text{ kNcm}. \end{aligned} \quad (26)$$

Bei Beachtung der Symmetrie wird ein Viertel des Querschnitts mit 4-Knoten-Elementen diskretisiert. Die Ergebnisse für das vollplastische Torsionsmoment M_T^{pl} und den Formbeiwert κ sind für drei verschiedene Netze in Tabelle 1 angegeben. Man erkennt die sehr gute Übereinstimmung mit der theoretischen Lösung.

Tabelle 1: Querschnittswerte eines Rechtecks Table 1. Section quantities of a rectangle

FE-Netz	M_T^{pl} in kNcm	κ
2 × 4	1454.7	1.707
10 × 20	1443.4	1.694
20 × 40	1443.4	1.694
analytisch	1443.4	1.694

In Bild 2 ist das bezogene Torsionsmoment M_T/M_T^{el} in Abhängigkeit von α/α^{el} mit $\alpha^{el} = M_T^{el}/GI_T$ und $I_T = 285.87 \text{ cm}^4$ für die unterschiedlichen Netze aufgetragen. Das grobe Netz ergibt praktisch hinreichend genaue Ergebnisse. Die Kurven nähern sich asymptotisch dem theoretischen Formbeiwert $\kappa = 1.694$. In Bild 3 ist der Betrag des Schubspannungsvektors geplottet. Man sieht, daß praktisch der gesamte Querschnitt die Schubfließspannung τ_F annimmt und damit vollständig durchplastiziert ist. Weiterhin sind

in Bild 4 die Richtungen der resultierenden Schubspannungen und in Bild 5 die Verteilung der Wölbfunktion jeweils für den elastischen und den vollplastischen Zustand dargestellt. Die Anwendung der Sandhügel–Analogie ergibt für dieses Beispiel einen Körper entsprechend einem Walmdach. Sämtliche Neigungen des Körpers entsprechen dem Wert der Schubfließspannung τ_F , siehe Bild 3. Letztlich wird mit dem feinsten Netz nach einer Belastung bis $\alpha/\alpha^{el} = 10$ eine Entlastung durchgeführt, siehe Bild 2. Der zugehörige Eigenspannungszustand bei vollständiger Entlastung ist in Bild 6 dargestellt. Der maximale Betrag des Schubspannungsvektors ist mit $|\boldsymbol{\tau}| = 12.45 \text{ kN/cm}^2$ beachtlich.

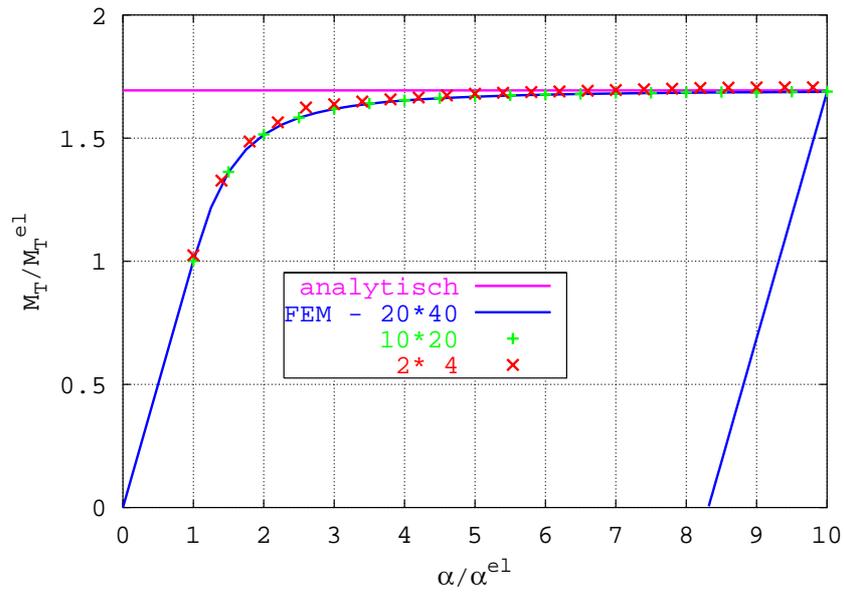


Bild 2: Torsionsmoment in Abhängigkeit von der Verdrillung.

Fig. 2. Torsion moment versus twist.

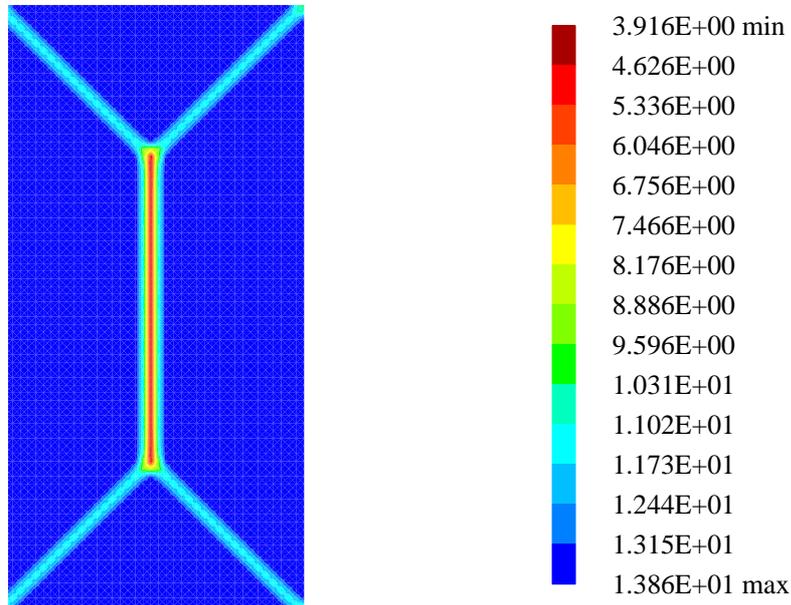


Bild 3: Betrag des Schubspannungsvektors im vollplastischen Zustand.
 Fig. 3. Absolute value of shear stress vector in the fully plastic state.

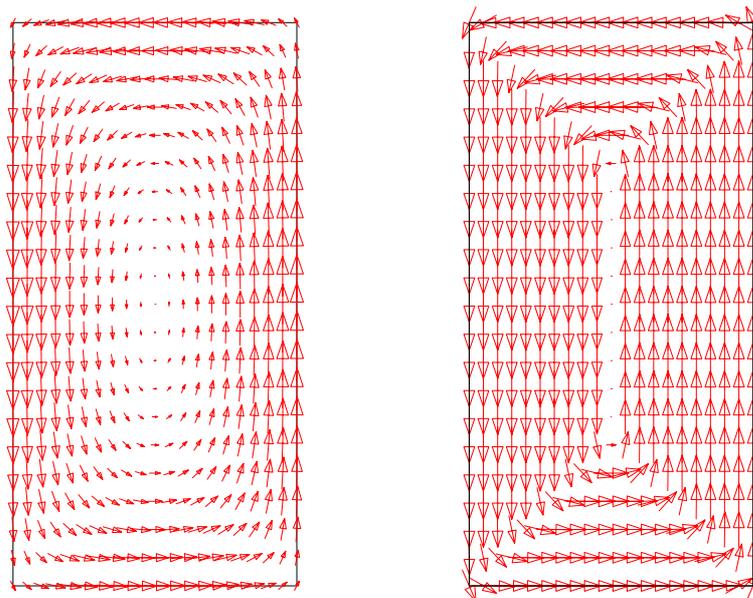


Bild 4: Schubspannungen im elastischen bzw. vollplastischen Zustand.
 Fig. 4. Shear stress vectors in the elastic and fully plastic state.

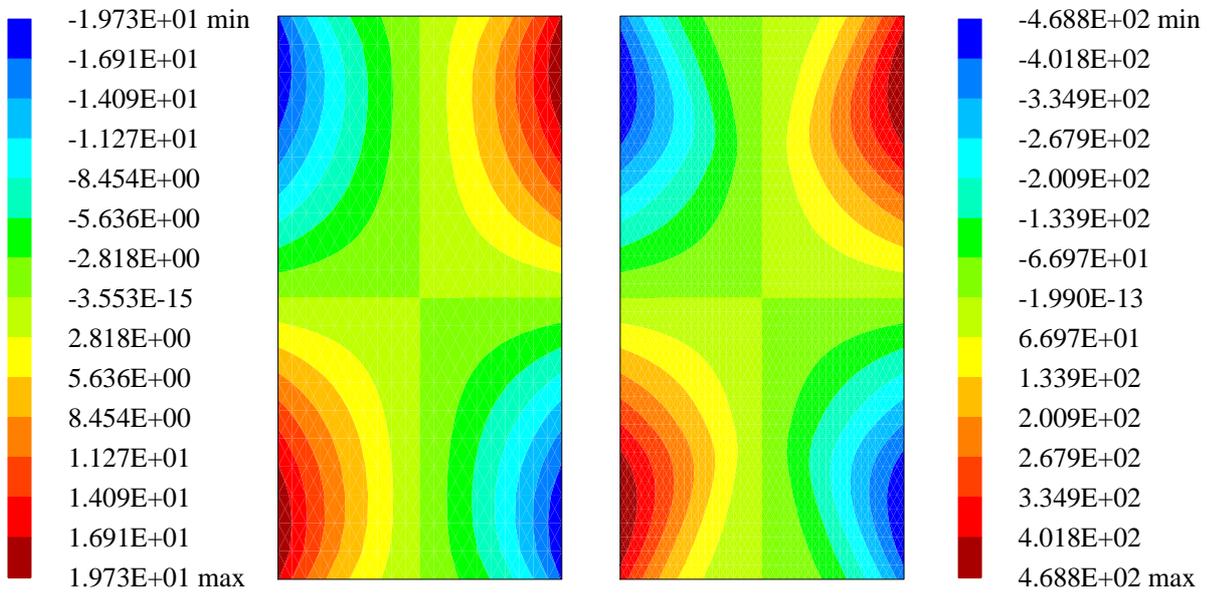


Bild 5: Wölbfunktion im elastischen und vollplastischen Zustand.
 Fig. 5. Warping function in the elastic and fully plastic state.

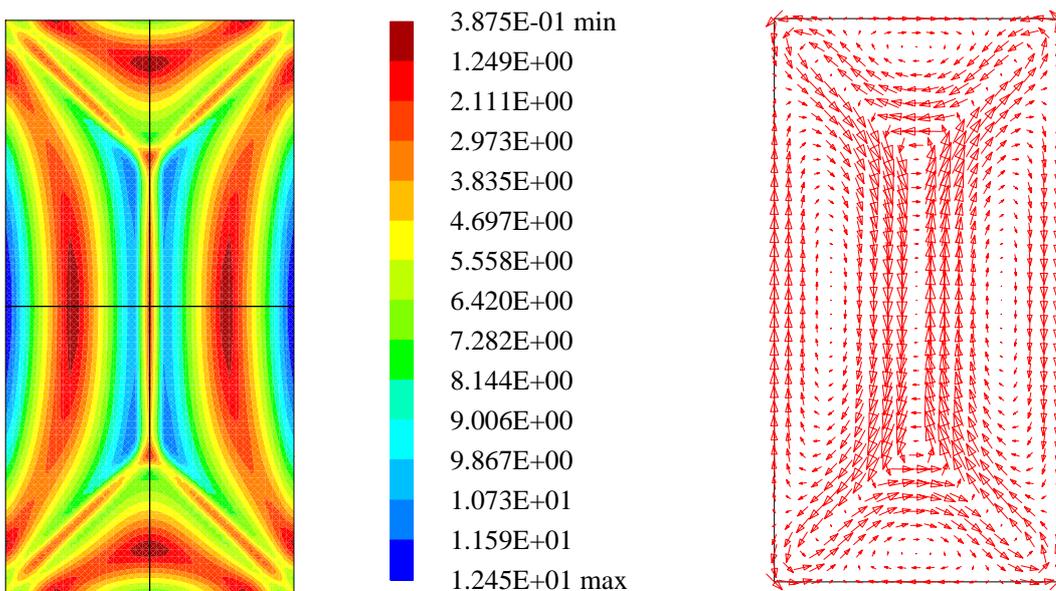


Bild 6: Eigenspannungszustand nach Entlastung, Beträge und Richtungen der Schubspannungsvektoren.
 Fig. 6. Residual stresses of the unloaded state, absolute values and directions of shear stress vectors.

5.2 Vollkreisquerschnitt

Als zweites Beispiel wird ein Vollkreisquerschnitt mit dem Radius $a = 5 \text{ cm}$ berechnet. Dieser Querschnitt ist wölbfrei, d.h. $w \equiv 0$. Die analytische elastoplastische Lösung ergibt in Abhängigkeit von der Verdrillung $\alpha \geq \alpha^{el}$

$$M_T = M_T^{pl} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^{el}}{\alpha} \right)^3 \right] \quad \alpha^{el} = \frac{\tau_F}{G a} . \quad (27)$$

Die Kurve schließt an die Gerade der linearen Lösung an und nähert sich asymptotisch dem Grenzwert M_T^{pl} . Dabei ist

$$\begin{aligned} M_T^{el} &= \frac{1}{2} \pi \tau_F a^3 = 2720.7 \text{ kNcm} \\ M_T^{pl} &= \frac{2}{3} \pi \tau_F a^3 = 3627.6 \text{ kNcm} . \end{aligned} \quad (28)$$

Der Formbeiwert kann damit zu $\kappa = 1.33$ ermittelt werden.

Für die FE-Lösung wird unter Ausnutzung der Symmetrie ein Viertel mit 4-Knotenelementen diskretisiert, siehe Bild 7. Bild 8 zeigt die numerischen Ergebnisse der berechneten Torsionsmomente bei unterschiedlichen Netzdichten. Auch hier ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Weiterhin ist in Bild 9 der Verlauf der resultierenden Schubspannungsvektoren dargestellt.

Kreisringquerschnitte können problemlos analog untersucht werden.

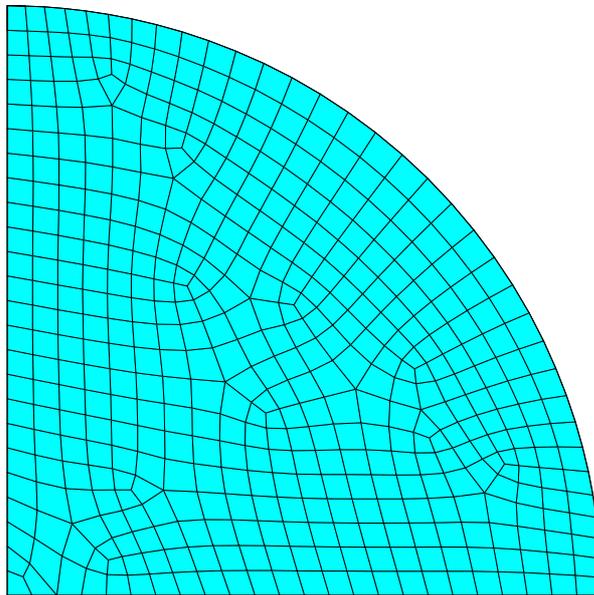


Bild 7: Diskretisierung des Kreisquerschnitts.

Fig. 8. Discretization of the circular cross-section .

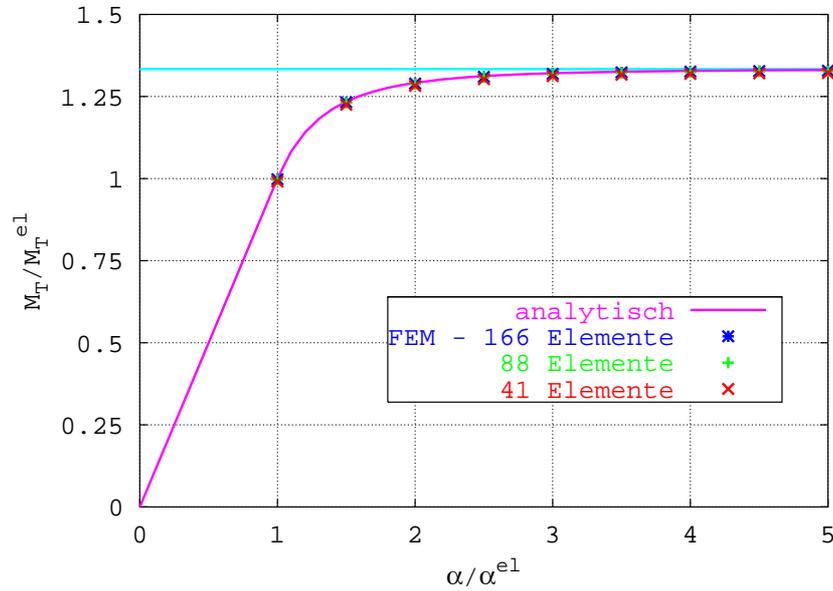


Bild 8: Torsionsmoment in Abhängigkeit von der Verdrillung.
 Fig. 8. Torsion moment versus twist.

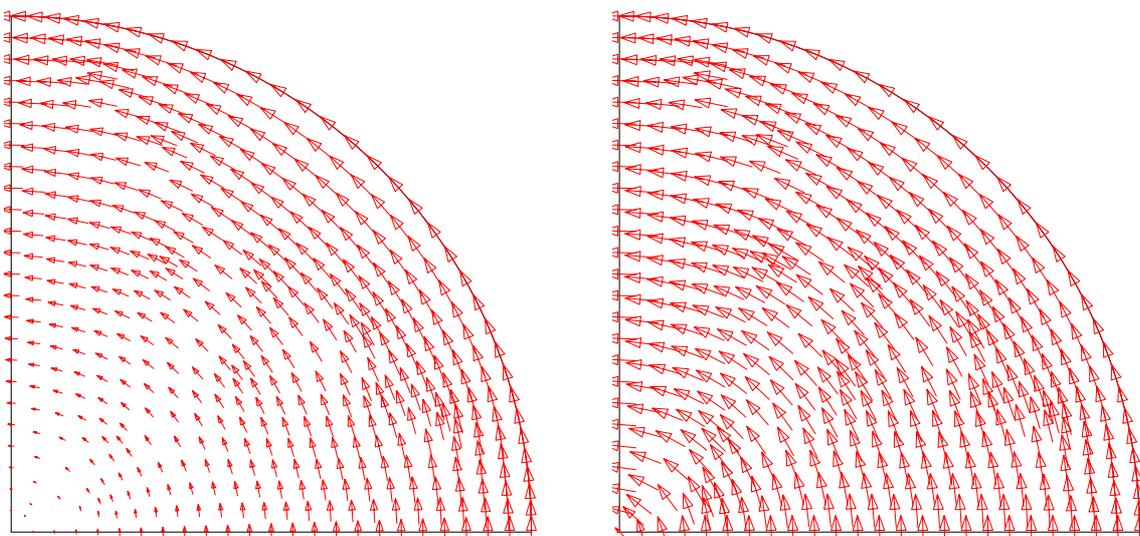


Bild 9: Schubspannungsvektoren im elastischen und vollplastischen Zustand.
 Fig. 9. Shear stress vectors in the elastic and fully plastic state.

5.3 Walzprofil HEM–300

Als nächstes Beispiel wird ein Stahlbauprofil berechnet. Die Abmessungen eines HEM–300 können DIN 1025 Teil 4 (10.63) entnommen werden. Bei der Diskretisierung von einem Viertel des Querschnitts werden Netze mit 4–Knotenelementen erstellt, siehe Bild 10. Die Ergebnisse der Berechnung für M_T sind in Bild 11 dargestellt. In Tabelle 2 sind die Werte für das vollplastische Torsionsmoment M_T^{pl} und den Formfaktor κ angegeben. Als Bezugswert M_T^{el} erhält man mit dem feinsten FE–Netz $M_T^{el} = 3583.1 \text{ kNcm}$. Die Querschnittsreserve ist mit $\kappa = 2.12$ beachtlich. Der Wert α^{el} folgt aus $\alpha^{el} = M_T^{el}/GI_T$ mit $I_T = 1414.9 \text{ cm}^4$. Hierbei wurde I_T ebenfalls auf dem feinsten FE–Netz berechnet, siehe [3]. In Bild 12 ist der Betrag des Schubspannungsvektors über den Querschnitt geplottet. Man erkennt den Verlauf der Gratlinien bei Anwendung der Sandhügel–Analogie. Letztlich sind in Bild 13 die Richtungen der Schubspannungen für den elastischen und vollplastischen Zustand dargestellt.

Tabelle 2: Querschnittswerte für ein HEM 300. Table 2. Section quantities for HEM 300.

FE–Netz	M_T^{pl} in $kNcm$	Formfaktor
288 Elemente	7632.0	2.130
534 Elemente	7599.8	2.121
1235 Elemente	7599.8	2.121

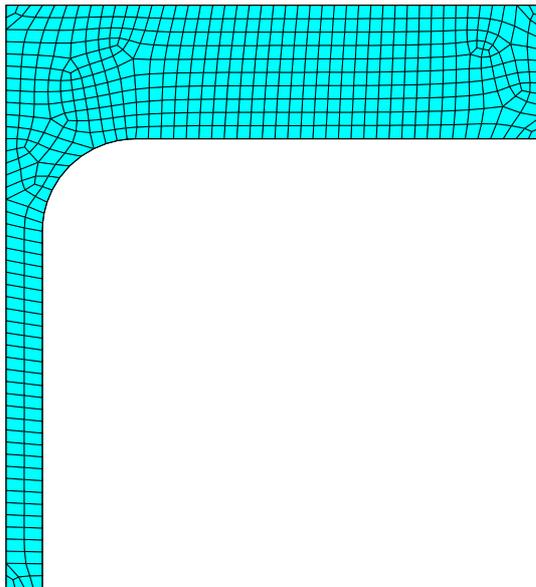


Bild 10: Diskretisierung eines Viertels eines HEM–300 mit 534 Elementen.
 Fig. 10. Discretization of a quarter of a HEM–300 using 534 elements.

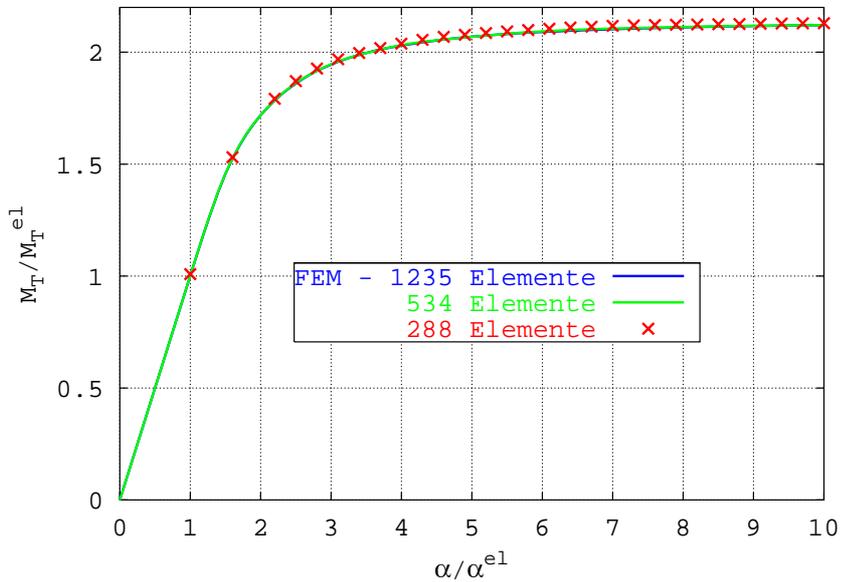


Bild 11: Torsionsmoment in Abhängigkeit von der Verdrillung.
 Fig. 11. Torsion moment versus twist.

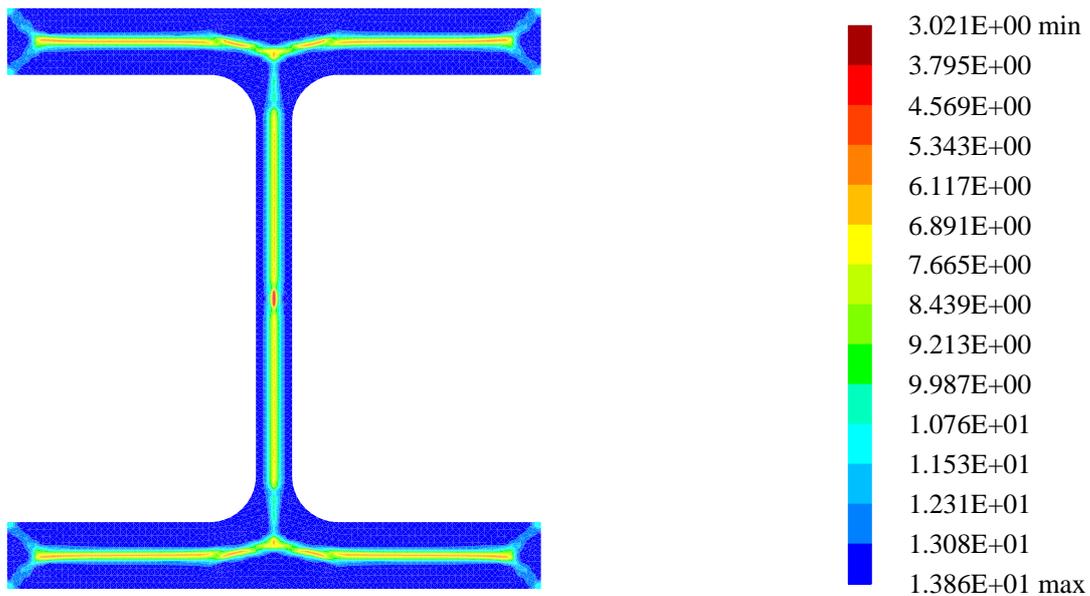


Bild 12: Betrag des Schubspannungsvektors im vollplastischen Zustand.
 Fig. 12. Absolute value of shear stress vector in the fully plastic state.

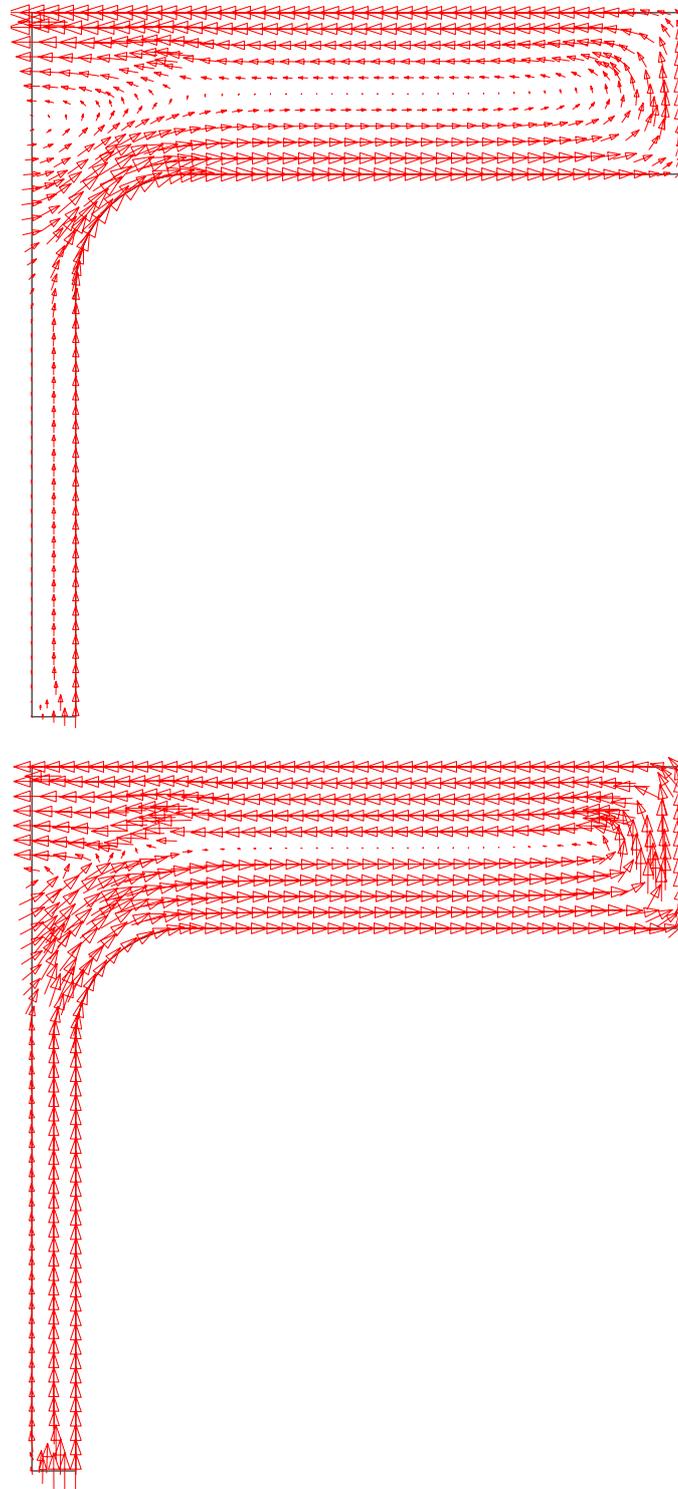


Bild 13: Schubspannungsvektoren im elastischen bzw. vollplastischen Zustand.
Fig. 13. Shear stress vectors in the elastic and fully plastic state.

5.4 Dickwandiger Hohlquerschnitt

Die entwickelte FE-Formulierung ist auch auf mehrfach zusammenhängende Gebiete anwendbar. Dazu wird als letztes Beispiel ein Querschnitt mit Loch gemäß Bild 14 untersucht. Eine Diskretisierung mit 599 Elementen ist ebenfalls in Bild 14 dargestellt. Zur Erzielung stabiler Gleichgewichtssituationen im vollplastischen Zustand wird als plastischer Tangentenmodul $\xi = 10^{-5} G$ angenommen. Als Bezugswert M_T^{el} erhält man mit dem feinsten Netz $M_T^{el} = 1.72772 \cdot 10^7 \text{ kNcm}$. In Tabelle 3 sind die Werte für M_T^{pl} und κ angegeben. Der Torsionswiderstand beträgt $I_T = 1.79597 \cdot 10^8 \text{ cm}^4$. Die Ergebnisse für M_T sind in Bild 15 in Abhängigkeit von der Verdrillung für drei verschiedene Netze aufgetragen. Der Betrag und die Richtungen der Schubspannungsvektoren sind in den Bildern 16 und 17 dargestellt.

Tabelle 3: Querschnittswerte für einen dickwandigen Hohlquerschnitt Table 3. Section quantities for a thickwalled hollow cross-section

FE-Netz	M_T^{pl} in $kNcm$	Formfaktor
279 Elemente	$2.80755 \cdot 10^7$	1.625
599 Elemente	$2.80409 \cdot 10^7$	1.623
1077 Elemente	$2.80409 \cdot 10^7$	1.623

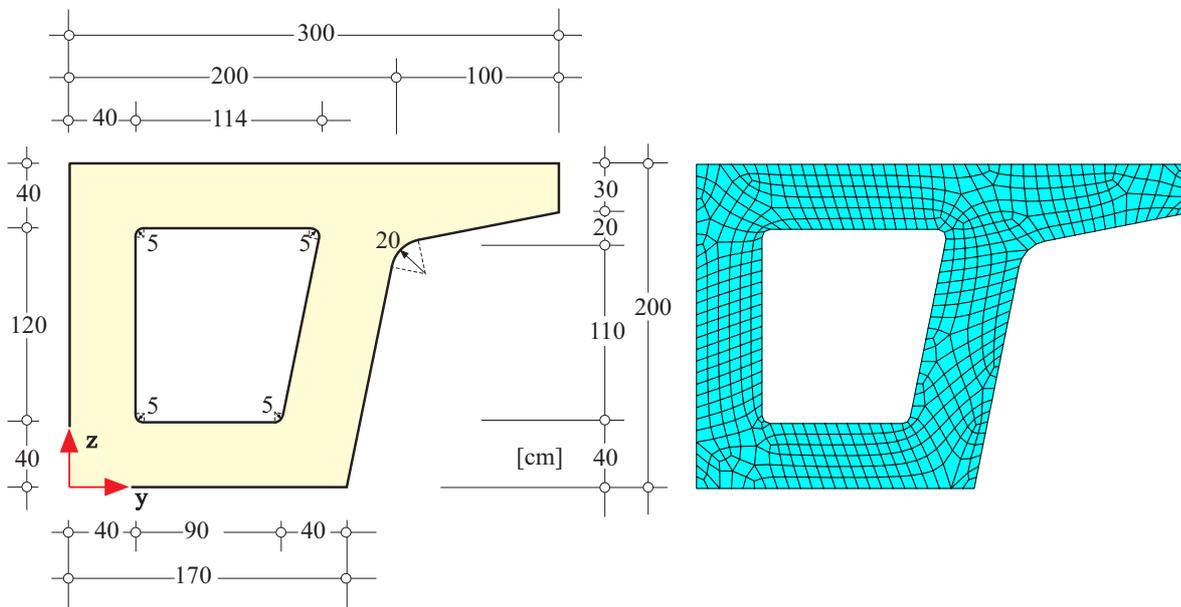


Bild 14: Dickwandiger Hohlquerschnitt, Geometrie und Diskretisierung.
Fig. 14. Hollow cross-section, geometry and discretization.

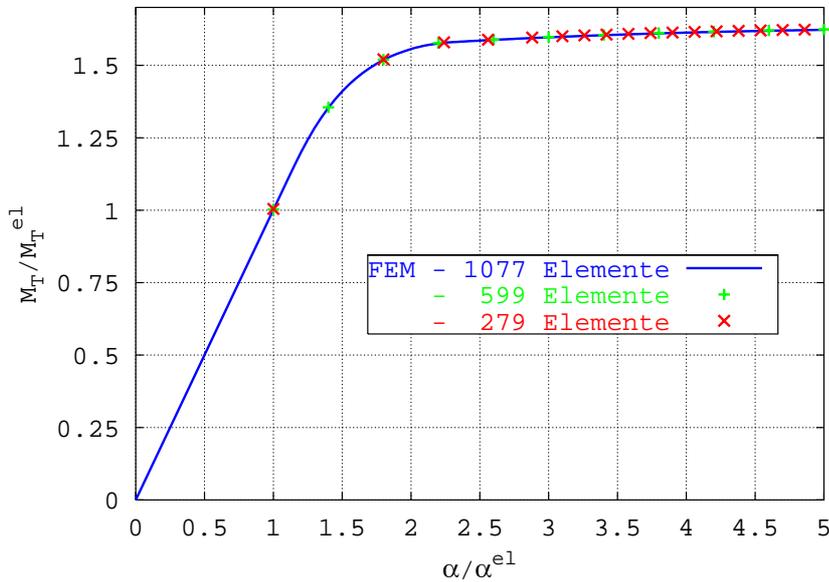


Bild 15: Torsionsmoment in Abhängigkeit von der Verdrillung.
 Fig. 15. Torsion moment versus twist.

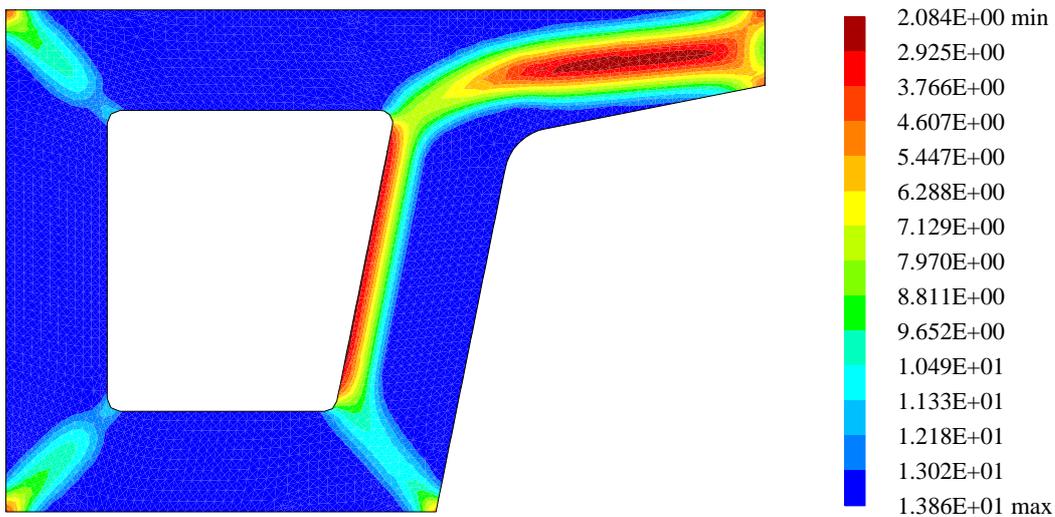


Bild 16: Betrag des Schubspannungsvektors im vollplastischen Zustand.
 Fig. 16. Absolute value of shear stress vector in the fully plastic state.

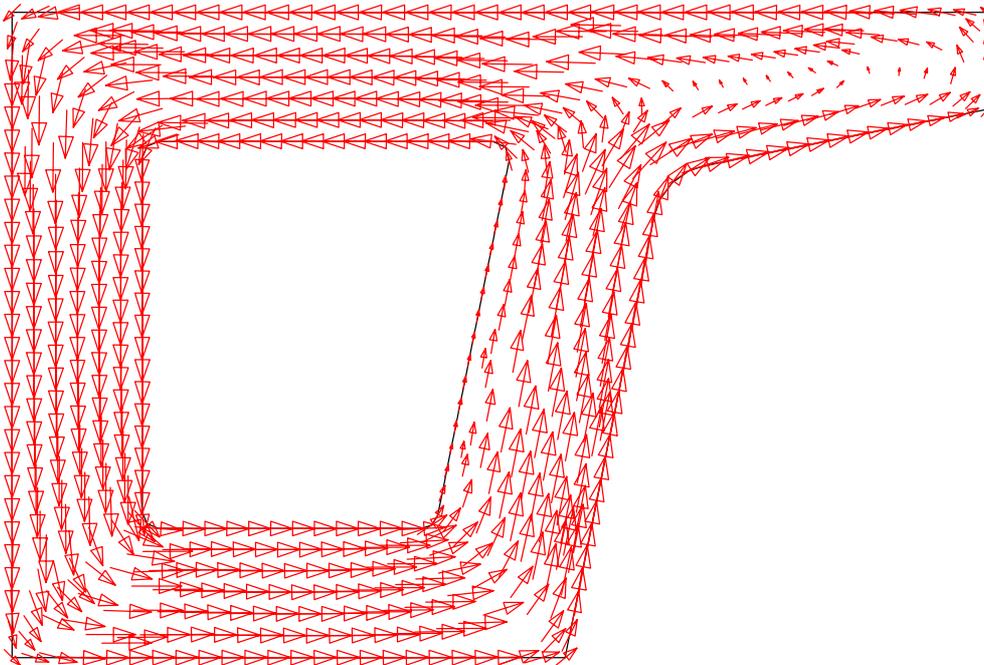
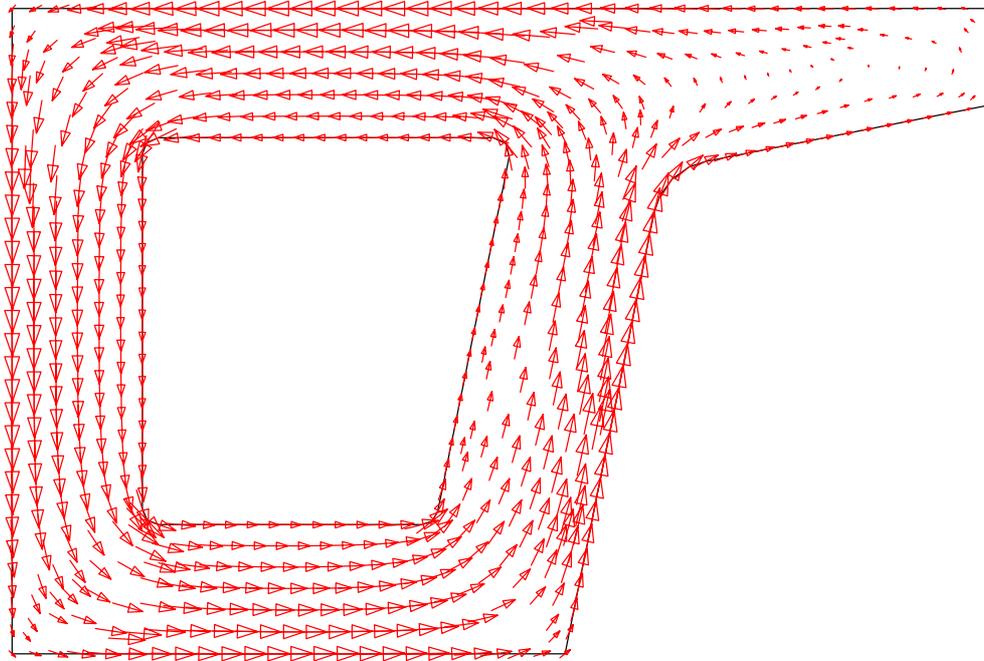


Bild 17: Schubspannungsvektoren im elastischen bzw. vollplastischen Zustand.
 Fig. 17. Shear stress vectors in the elastic and fully plastic state.

6 Schlußfolgerungen

Auf Grundlage der Gleichungen der St.Venantschen Torsion und bei Verwendung eines elastoplastischen Stoffgesetzes werden Variationsformulierungen und zugehörige FE-Darstellungen hergeleitet. Bei den Beispielen werden die aufnehmbaren Torsionsmomente einiger Querschnitte in Abhängigkeit von der Verdrillung berechnet. Die numerischen Berechnungen stimmen sehr gut mit vorhandenen analytischen Lösungen überein. Durch Anwendung der Sandhügel-Analogie können die Ergebnisse auf Plausibilität überprüft werden. Das erstellte Programm liefert somit für beliebige Querschnittsformen das vollplastische Torsionsmoment und damit die Querschnittsreserven infolge Plastizierens bei reiner Torsion.

Literatur

- [1] *Petersen, C.*: Stahlbau, Braunschweig/Wiesbaden Vieweg & Sohn 1988 **1**
- [2] *Lubliner, J.*: Plasticity Theory, Macmillan Publishing Company New York, Collier Macmillan Publishers London 1990. **1, 2, 5**
- [3] *Gruttmann, F.; Wagner, W.; Sauer, R.*: Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente. Bauingenieur, 73 3 (1998) 138–143. **1, 2, 4, 5.3**
- [4] *Yamada, Y.; Nakagiri, S.; Takatsuka, K.*: Elastic–Plastic Analysis of Saint–Venant Torsion Problem by a hybrid Stress Model. Int. J. Num. Meth. Engng. 5 (1972) 193–207. **1**
- [5] *Baba, S.; Kajita, T.*: Plastic Analysis of Torsion of a Prismatic Beam. Int. J. Num. Meth. Engng. 18 (1982) 927–944. **1**
- [6] *Nádai, A.*: Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab. ZAMM 3 (1923) 442–454. **1**
- [7] *Stein, E.; Lambertz, K.H.; Plank, L.*: Ultimate load analysis of thin walled steel structures with elastoplastic deformation properties using FEM – Theoretical, algorithmic and numerical investigations. Pietraszkiewicz, W. (ed.): Finite rotations in structural mechanics, Proc. of the Euromech Colloquium 197, Sept. 17–20, 1985, Jablona, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1986. **3**
- [8] *Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.*: The Finite Element Method, Band 2, 4. Auflage London McGraw–Hill 1989.

F. Gruttmann, Institut für Statik, Technische Universität Darmstadt,
Alexanderstraße 7
64283 Darmstadt

W. Wagner
Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH),
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Prof. Dr.–Ing. habil. Friedrich Gruttmann ist Ordinarius am Institut für Statik der Technischen Universität Darmstadt,
Prof. Dr.–Ing. habil. Werner Wagner ist Ordinarius am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe(TH) .