

Gemischte finite Balken- und Plattenelemente mit verbesserter Zick-Zack-Kinematik und kontinuierlichen interlaminaren Schubspannungen

Andreas Müller

1. Motivation

Die Motivation bei der Herstellung von Laminaten ist das Erzeugen neuer Materialeigenschaften, die sich derart nicht mit einem homogenen Vollquerschnitt erreichen lassen, und die sich auf die jeweiligen spezifischen Anforderungen anpassen lassen. Im Bauwesen hat sich u.a. der Einsatz von Verbundsicherheitsglas, Brettschichtholz und Sandwichelementen durchgesetzt. Im Gegensatz zu homogenen Materialien tritt bei der Biegeverformung geschichteter heterogener Tragwerke eine Verwölbung des Querschnitts in Längsrichtung auf, d.h. die Querschnittsfläche bleibt nicht eben. Bei einer Berechnung von schubweichen geschichteten Tragwerken werden oftmals die FSDT-Theorien (engl. *First-Order Shear Deformation Theories*) angewendet. Hierunter fällt die Timoshenko-Balkentheorie (TBT) und die Reissner-Mindlin-Plattentheorie (RMT). In der Praxis werden deshalb oftmals 3D-Modelle gegenüber den FSDT-Annahmen bevorzugt, da diese i.d.R. dazu neigen Spannungen deutlich zu unterschätzen. Allerdings sind 3D-Modelle, mit ansteigender Schichtenanzahl, unverhältnismäßig rechenintensiv und damit unrentabel. Deswegen ist man dazu übergegangen Theorien höherer Ordnung zu entwickeln, wie z.B. die *Refined Zigzag*-Theorie (RZT), welche grundlegend auf einer FSDT-Kinematik basiert.

2. Refined Zigzag-Theorie

Die Grundidee der RZT besteht darin das axiale Verschiebungsfeld der FSDT $u_\alpha + z\theta_\alpha$ mit einem Zick-Zack(zz)-Verschiebungsfeld gemäß der nachfolgenden Gleichung zu überlagern (vgl. Abbildung 1).

$$\bar{u}_\alpha^k(x, y, z) = u_\alpha(x, y) + z\theta_\alpha(x, y) + \phi_\alpha^k(z)\psi_\alpha(x, y) \quad \text{mit } \alpha = x, y$$

Dabei setzen sich die zusätzlichen zz-Anteile $\bar{u}_{zz,\alpha}^k(x, y, z) = \phi_\alpha^k\psi_\alpha$, mit $k = 1, n_{lay}$, zusammen aus der zz-Funktion ϕ_α^k , welche unabhängig von der FE-Berechnung ist, und der Amplitude ψ_α , die als zusätzlicher Freiheitsgrad in die weitere Berechnung eingeht.

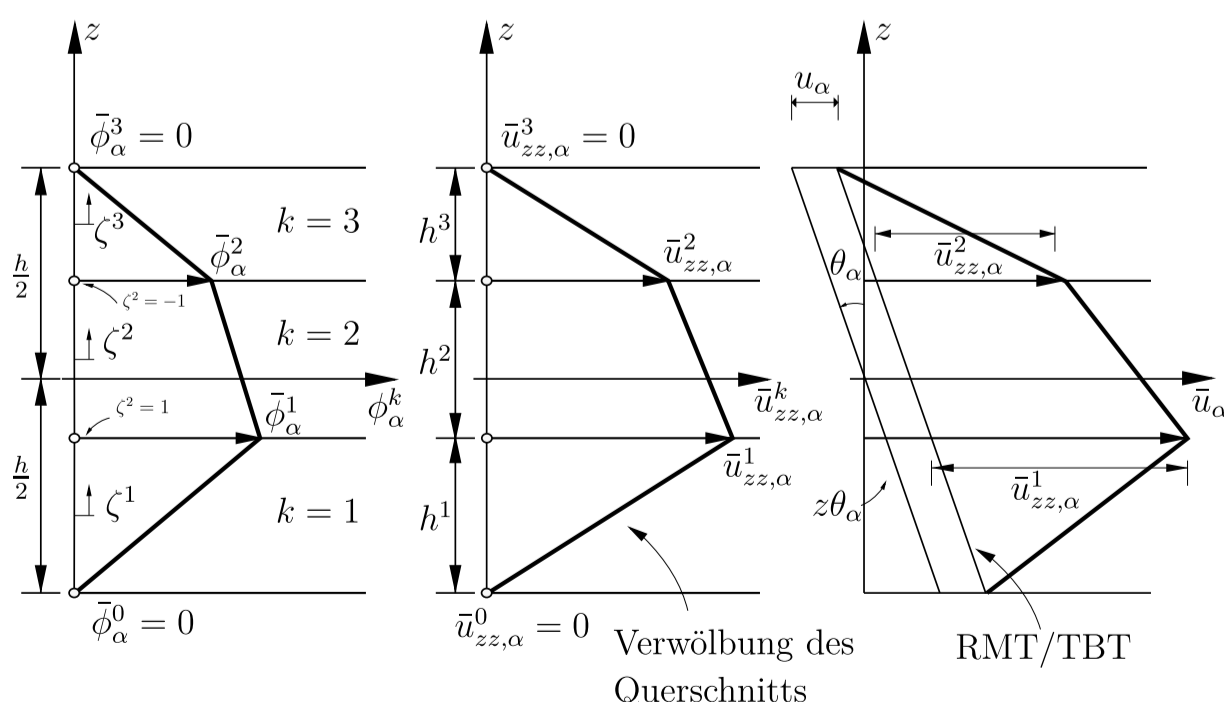


Abbildung 1: zz-Funktion ϕ_α^k , RZT-Axialverschiebung $\bar{u}_{zz,\alpha}^k$, gesamte Axialverschiebung \bar{u}_α^k

3. Elementformulierungen

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein lineares RZT-Balkenelement sowie ein bilineares RZT-Plattenelement hergeleitet, deren Formulierung jeweils auf dem *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* basiert.

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} dA - \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} dV$$

Beide Elemente haben zum Nachteil, dass sie lediglich einen schichtweise konstanten diskontinuierlichen Querschubspannungsverlauf liefern. Basierend auf einem HELLINGER-REISSNER-Funktional wird daher ein gemischtes Balkenelement mit RZT-Kinematik erarbeitet, welches diesen Defekt durch eine unabhängige Formulierung der transversalen Spannung $\sigma_t = \tau_{xz}$ beseitigt.

$$\Pi(\mathbf{u}, \sigma_t) = \int_V \left[\varepsilon_p \sigma_p + \varepsilon_t \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t (C_t^{-1} \sigma_t) \right] dV + \Pi_{\text{ext}} \rightarrow \text{stat.}$$

4. Numerische Auswertung

Es wird ein dreischichtiger Kragarm unter Einzellast $F = 1 \text{ N}$ mit einem Verhältnis der Spannweite L zur Trägerhöhe h von $L/h = 5$ und einer Breite von $b = 1 \text{ mm}$ untersucht. Die Gesamthöhe beträgt $h = \sum_{k=1}^3 h^k = 20 \text{ mm}$.

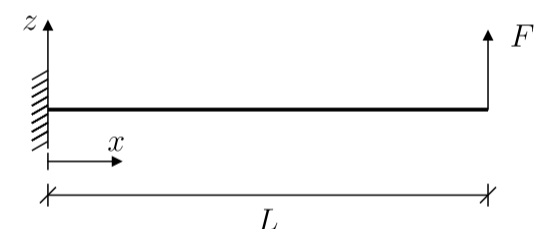


Abbildung 2 zeigt, dass die Ergebnisse der Axialverschiebung $\bar{u}_x^k(x, z)$ des rein verschiebungsbasierten Balkenelementes (RZB) und des gemischten RZT-Balkenelementes (m-RZB) mit denjenigen eines 9-Knoten-Scheibenmodells (2D) sehr gut übereinstimmen. Im Gegensatz dazu liefert die TBT-Formulierung nur einen linearen Verschiebungsverlauf. Durch die gemischte Elementformulierung (m-RZB) kann darüber hinaus auch der kontinuierliche Schubspannungsverlauf $\tau_{xz}^k(x, z)$ mit hoher Genauigkeit beschrieben werden.

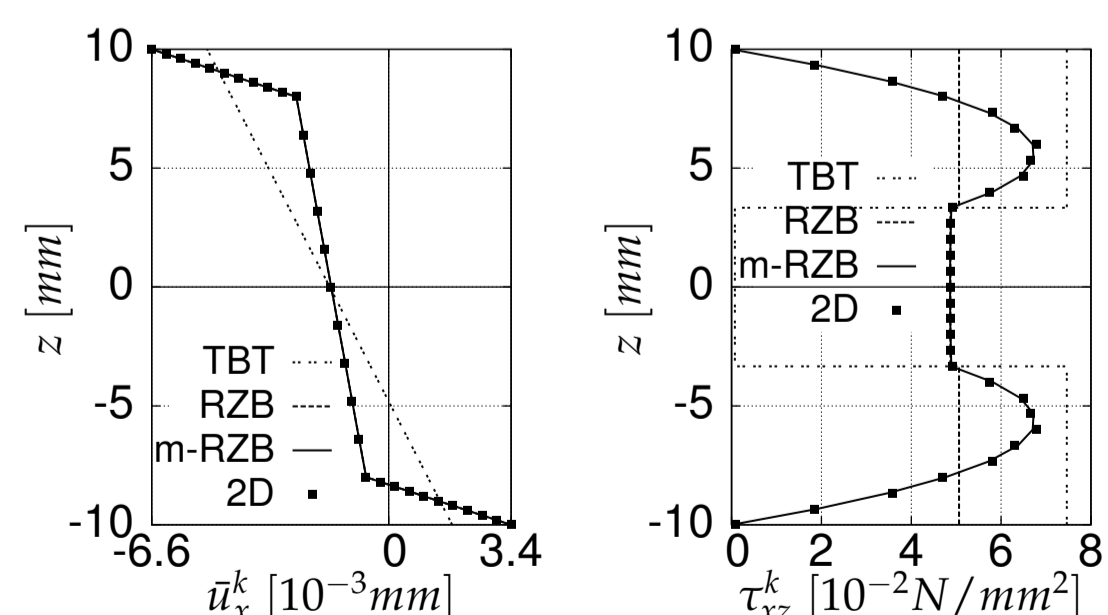


Abbildung 2: Axialverschiebung $\bar{u}_x^k(L/4, z)$ (links), Schubspannung $\tau_{xz}^k(L/4, z)$ (rechts)