

Theorie und FE-Modellierung eines geometrisch nichtlinearen 3D-Timoshenko-Balkenelements

Andreas Müller

1. Einleitung

Anfang des 20. Jahrhunderts wurde von Stephen Timoshenko die klassische Balkentheorie nach Bernoulli erweitert. Er stellte bereits in seinem 1937 erschienenen Werk VIBRATIONS PROBLEMS IN ENGINEERING fest, dass für prismatische, gedrungene Balken, welche mit hohen Frequenzen schwingen, die Effekte der Schubbelastung mitberücksichtigt werden sollten. Für die Balkentheorie ergibt sich eine Überlagerung der Querschnittsverdrehung ϕ mit einem Gleitungswinkel γ des Querschnitts infolge einer Querkraftbelastung.

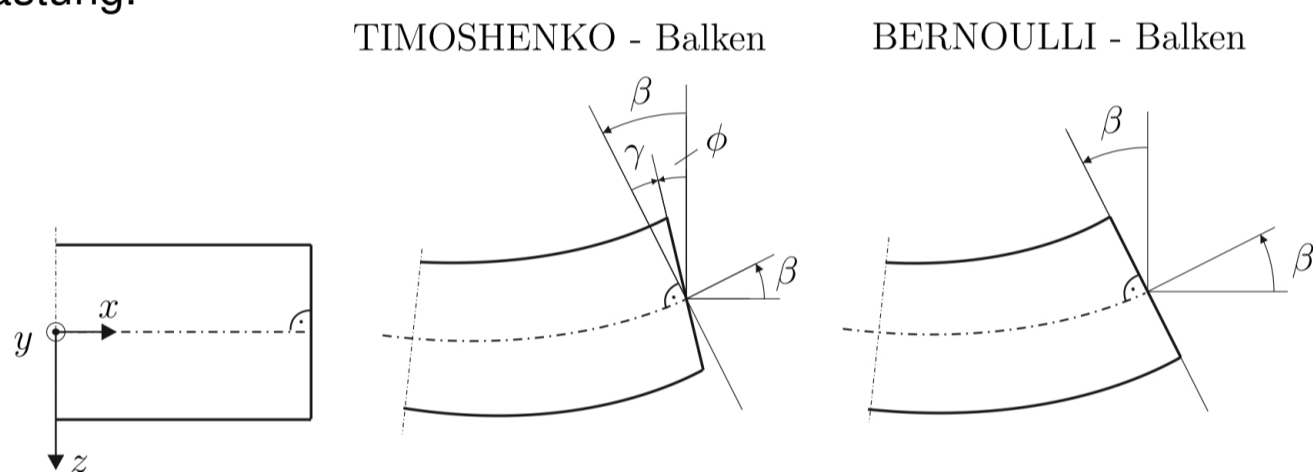


Abbildung 1.1: Vergleich Bernoulli- und Timoshenko-Balken

Im Gegensatz zur Balkentheorie nach Bernoulli bleiben die Querschnitte nicht senkrecht zur verformten Balkenachse.

2. Theorie eines 3D-Balkenelements

Ausgehend vom elastischen Potential

$$\Pi^e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx - \int_0^{l_e} \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx - \mathbf{u}^T(x) \bar{\mathbf{F}}$$

wird die Ausgangsgleichung für die FEM mithilfe des Prinzips vom Minimum des elastischen Potentials ermittelt. Mit den linearen Ansatzfunktionen $N_1 = 1 - \frac{x_l}{l_e}$ und $N_2 = \frac{x_l}{l_e}$, $x_l \in [0, l_e]$ werden die Komponenten des linearisierten Prinzips der virtuellen Verrückungen algebraisiert (\Rightarrow PdvV)

$$L[\delta \Pi] = \delta \mathbf{v}_l^T \left[\int_0^{l_e} (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h - \mathbf{N}^T \mathbf{q}) dx + \int_0^{l_e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{G}) dx \Delta \mathbf{v}_l - \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}} \right].$$

3. Geometrische Nichtlinearität

Um Stabilitätsuntersuchungen durchzuführen, ist es notwendig eine konsistente Stabtheorie mit nichtlinearen Dehnungsmaßen zu formulieren. Eine korrekte Beschreibung eines nichtlinearen Dehnungsmaßes liefert der Green'sche Verzerrungstensor

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{m,i} \bar{u}_{m,j}), \quad \text{mit } i, j = x, y, z \text{ bzw. } m = x, y, z$$

Dabei sind $\bar{u}_{i,j}$, $\bar{u}_{i,j}$ usw. die partiellen Ableitungen der Verschiebungen eines beliebigen Punktes P. Diese sind abhängig von

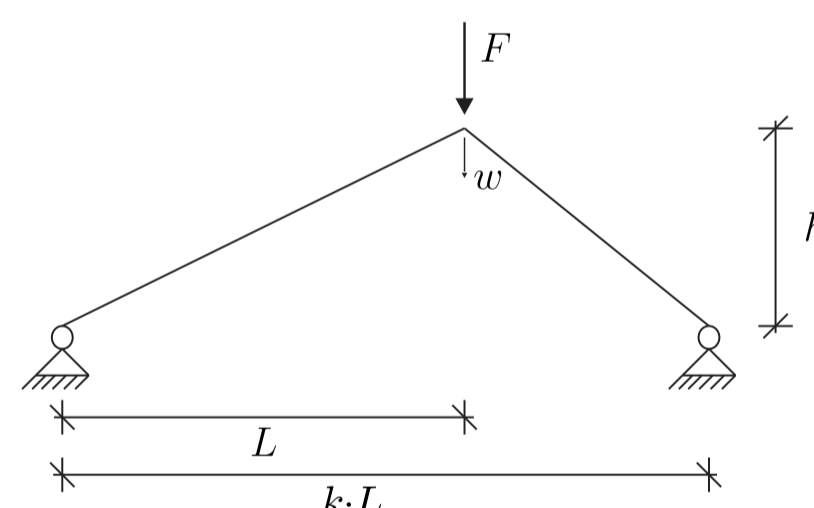
den Verschiebungen eines Punktes auf der Schwerachse und damit enthalten die Green'schen Verzerrungen Stabdehnungen und -verkrümmungen der Schwerachse. Diese werden in einem Vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \vartheta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x + \frac{1}{2}u_x'^2 + \frac{1}{2}u_y'^2 + \frac{1}{2}u_z'^2 \\ u'_y - \beta_z(1 + u'_x) \\ u'_z + \beta_y(1 + u'_x) \\ \beta'_x \\ \beta'_y(1 + u'_x) \\ \beta'_z(1 + u'_x) \end{bmatrix}$$

zusammengefasst. Hierbei wurden der Stabtheorie entsprechend die Anteile E_{yy} , E_{zz} und E_{yz} vernachlässigt. Darüber hinaus wurden die Effekte der Querschnittsverwölbung, welche sich aus Torsion und Querschubbelastung ergeben, nicht berücksichtigt.

4. Untersuchung eines Zweischlags

Für einen steilen ($h = \frac{L}{3}$) und einen flachen ($h = \frac{L}{6}$) asymmetrischen Zweischlag ($k=1,5$) werden die Lastverschiebungskurven bestimmt. Hierbei wird der Lastverschiebungspfad mit einem verschiebungsgesteuerten Ansatz ermittelt.



Angaben:
 $E = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
 $A = 33,4 \text{ cm}^2$
 $I = 2140 \text{ cm}^4$
 $G = 8700 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$
 $F = 100 \text{ kN}$
 $L = 100 \text{ cm}$
 $k = 1,5$

Abbildung 4.1: Geometrie und Kennwerte

Bei der grafischen Auswertung wird jeweils die Belastung F über die Verschiebung w aufgetragen. Die Lastverschiebungskurven für einen flachen und einen steilen Zweischlag sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

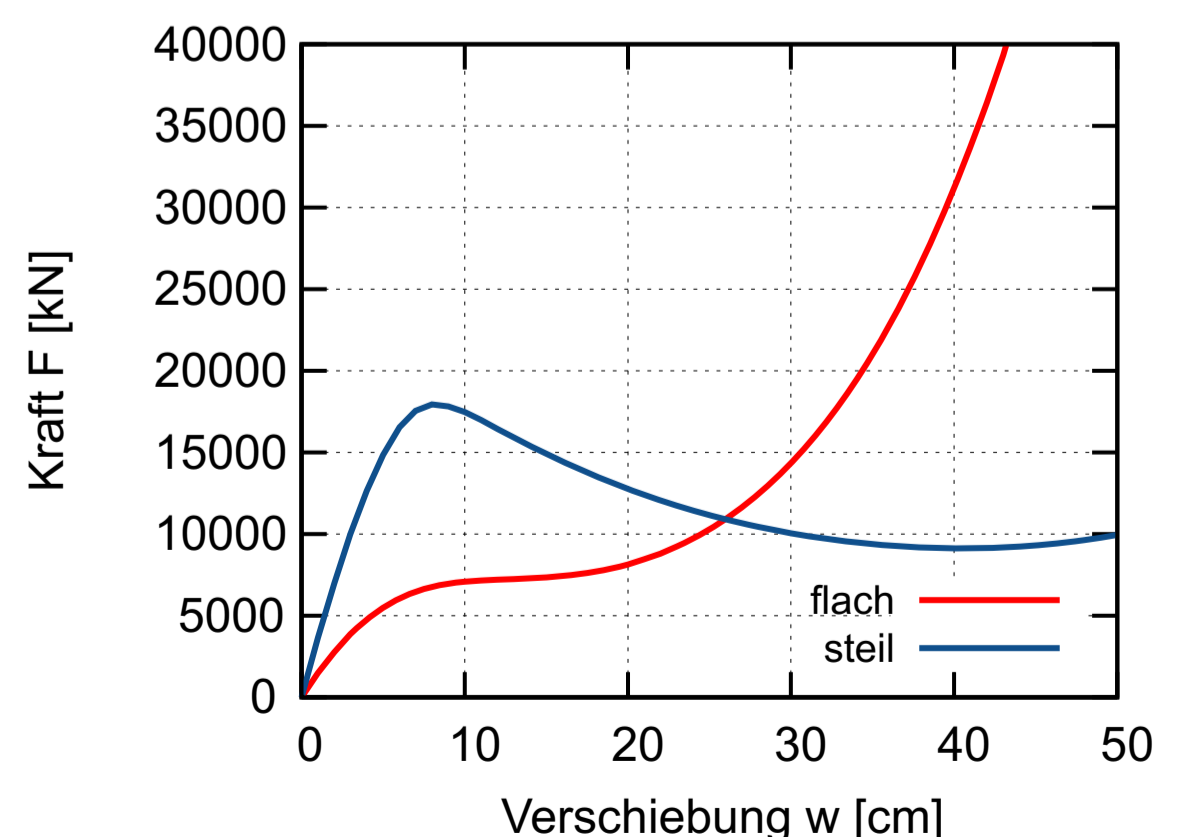


Abbildung 4.2: Lastverschiebungskurven