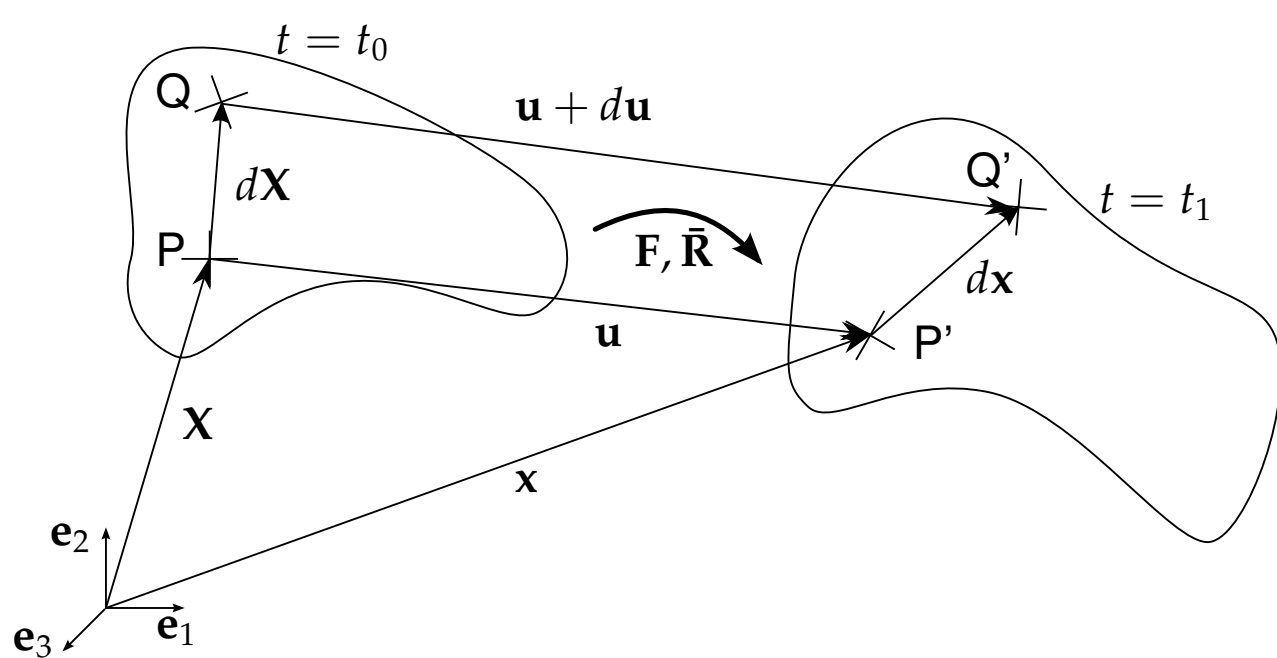


Ein vollständig gekoppeltes Cosserat Kontinuum für die Beschreibung von Mikrostrukturlösungen - Theorie und Analyse mit Finiten Elementen

Sven Nagel

1. Einleitung

Für mechanische Untersuchungen im Bauwesen wird meist auf die durch Boltzmann begründeten Annahmen der Kontinuumsmechanik zurückgegriffen. Die steigenden Ansprüche an die Genauigkeit sowie die Beschreibung von neuen Materialverhalten motivieren die in „Theorie des corps deformables“ formulierte Theorie der Brüder Cosserat aufzugreifen, zu erweitern und für die Anwendung in aktuellen FE-Programmen zu untersuchen. In dieser Theorie wird jedem Kontinuumpartikel neben der Lage auch eine Ausrichtung zugewiesen, die anhand von zusätzlichen kinematischen Feldern beschrieben wird. Außerdem ist das Auftreten von eingepprägten Momenten, zum Beispiel aus Versetzungen oder Magnetlasten, zulässig.



Für die kinematische Beschreibung muss ein Krümmungsmaß, das die Interaktion der Partikelrotationen abbildet, definiert werden. In dieser Arbeit wird das Krümmungsmaß mit

$$\epsilon := \text{Curl}[\bar{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{F}]$$

an Ort und Ausrichtung der Partikel gekoppelt und ermöglicht damit ein Zusammenspiel aller im Modell auftretenden Felder. Dies führt zu weiteren Möglichkeiten der Energieminimierung.

2. Der Curl-Operator

Um die angestrebten Mikrostrukturlösungen zu erhalten, orientiert sich das Krümmungsmaß an Versetzungstheorien und wird mathematisch durch den Curl-Operator beschrieben. Ausgehend von der durchgeführten Definition des Kreuzproduktes für tensorielle Größen konnten wichtige Zusammenhänge wie die Transformationsbeziehung für das Skalarprodukt des Curl

$$\text{tr}[\text{Curl}_{\#}[\mathbf{D}]] = -\langle \text{Grad}[\mathbf{D}], \epsilon \rangle \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

oder das Divergenztheorem zum Curl

$$\text{tr}[\text{Curl}_{\#}[\mathbf{D}]] = -\text{Div}[\mathbf{D}; \epsilon] \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

hergeleitet werden. Für die symbolische Beschreibung eines durch das Krümmungsmaß hervorgerufenen Zusammenhangs musste die Symbolik

$$\dot{\circ}$$

mit

$$\mathbf{A} \dot{\circ} \mathbf{B} := A_{alc} B_{amc} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$$

eingeführt werden. Dies tritt immer dann auf, wenn ein Kreuzprodukt zwischen dem Nabla-Operator und einem Produkt aus zwei zweistufigen Tensoren vorliegt.

3. Die Eulergleichungen

In der Cosseratspannung und der Cosseratmomentenspannung spiegelt sich die volle Kopplung wieder und zeigt damit das Potential dieser Theorie. Es können sowohl in die Impuls- als auch in die Drehimpulsbilanz Anteile aus Ort und Ausrichtung der Partikel eingehen.

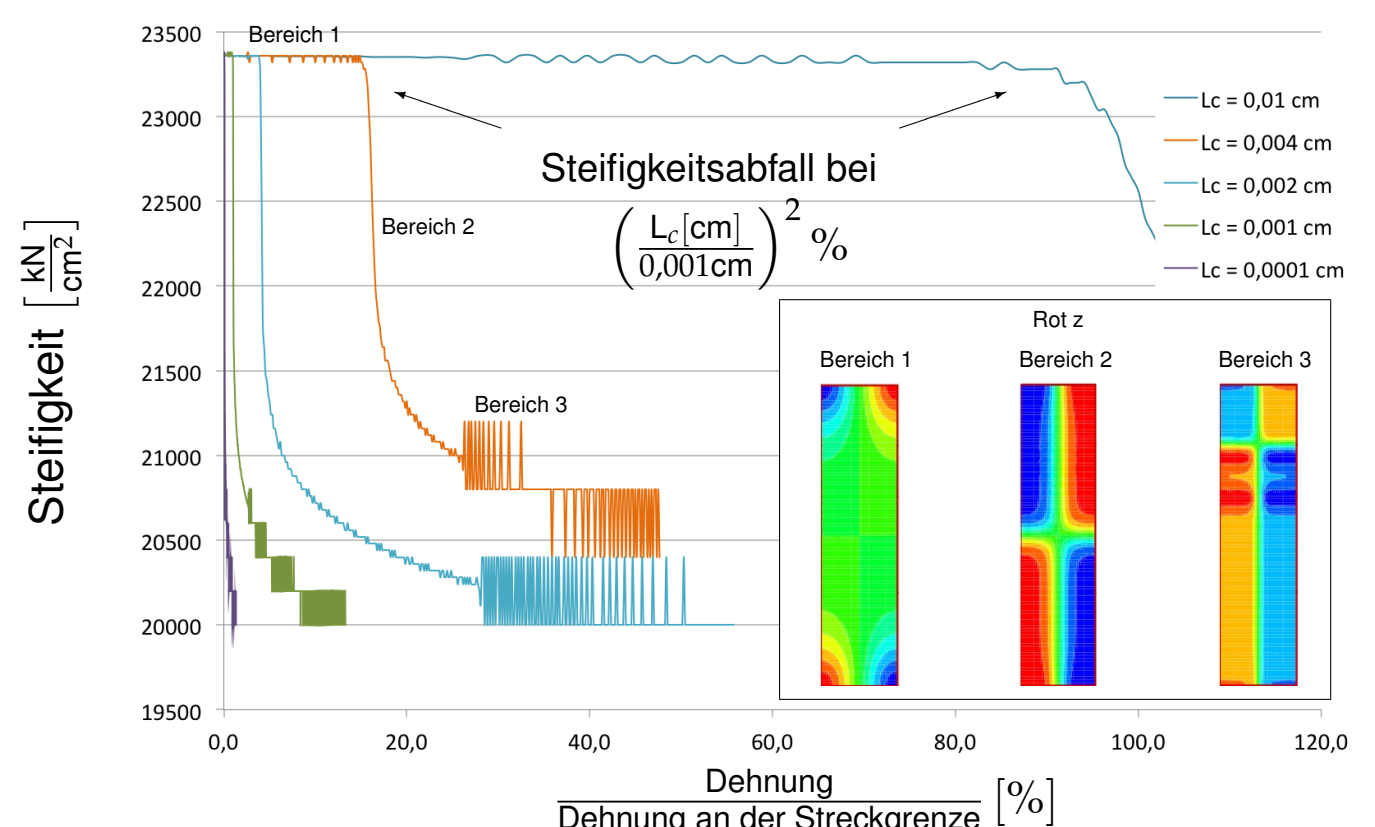
$$\text{Div}[\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{T} - (\hat{\mathbf{m}}^T \cdot \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}}^T]) \dot{\circ} \epsilon] + \mathbf{b} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Impulsbilanz})$$

$$- (\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{T}_{Lin} \cdot \mathbf{F}^T - \bar{\mathbf{R}} \cdot \text{Curl}_{\#}[\hat{\mathbf{m}}] \cdot \mathbf{F}^T) : \epsilon + \mathbf{m} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Drehimpulsbilanz})$$

Dies äußert sich durch die in beiden Termen auftretenden Spannungen \mathbf{T} und die Momentenspannungen $\hat{\mathbf{m}}$.

4. Numerische Untersuchung

Der durchgeführte 2-D Zugversuch führte zu einer auf Rotationen basierenden Mikrostrukturlösung. Diese kann als Erhöhung der Versetzungsdichte interpretiert werden und führt zu einem bilinearen Werkstoffverhalten.



Im Bereich 2, dem Steifigkeitsabfall, und Bereich 3, der reduzierten Steifigkeit, ist in der Umgebung um die größten Rotationsgradienten eine lokale Einschnürung der Probe festzustellen. Maßgebend für den Steifigkeitsabfall ist eine Grenzrotationsintensität. Deren Auftreten ist direkt von dem Cosseratparameter L_c abhängig.