Karlsruher Institut für Technologie

BAUSTATIK

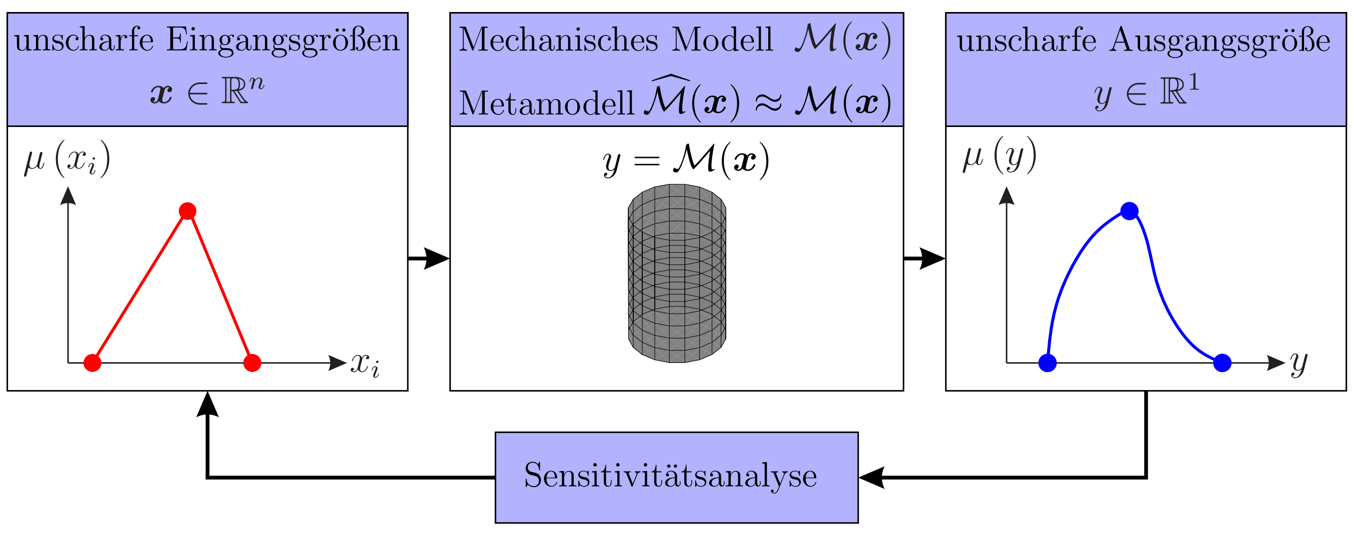
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Metamodellierung und Sensitivitätsanalyse in der numerischen Strukturanalyse mit polymorph unscharfen Parametern

Lukas Panther

1. Einleitung

Mechanische Strukturen sind im Allgemeinen von mehreren Eingangsvariablen abhängig. In der Realität sind diese mit Unsicherheiten behaftet. Polymorphe Unschärfemodelle ermöglichen die Berücksichtigung aleatorischer und epistemischer Unschärfen in der Strukturanalyse. Aleatorische Unsicherheiten werden mit den Methoden der Stochastik erfasst und beschreiben die natürliche Variabilität. Epistemische Unsicherheiten resultieren aus Unvollständigkeit und Ungenauigkeit, wie z.B. einer zu geringen Stichprobenanzahl und werden mit Fuzzy-Variablen beschrieben.



Die Unschärfen in den Eingangsparametern übertragen sich auf die entsprechende Ausgangsgröße, wie z.B. die Stabilitätslast einer Struktur. Mithilfe einer Sensitivitätsanalyse kann der Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße quantifiziert werden.

2. Metamodelle - Kriging und Neuronales Netz

Die unscharfe Ausgangsgröße lässt sich mithilfe der α-Level-Optimierung ermitteln. Diese Optimierungsaufgabe findet nicht auf dem mechanischen Modell $\mathcal{M}(\boldsymbol{x})$ statt, sondern auf einem vorher konstruierten Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$. Das Kriging-Modell ist ein Metamodell aus der Gruppe der Interpolationsmethoden.

$$\widehat{\mathcal{M}}_K(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})^T\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

Ein weiteres Metamodell ist ein Neuronales Netz, welches den Methoden der Ausgleichsrechnung angehört.

$$\widehat{\mathcal{M}}_{KNN}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n_2} w_{1i}^{(3)} \cdot \text{sigmoid}\left(\sum_{j=0}^{n_1} w_{ij}^{(2)} \cdot x_j\right)$$

3. Globale Sensitivitätsanalyse

Ausgangspunkt der globalen Sensitivitätsanalyse ist die High-Dimensional-Model-Representation (HDMR) des Metamodells.

$$\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}) \approx \widehat{\mathcal{M}}_0 + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mathcal{M}}_i(x_i) + \sum_{1\le i<j\le n} \widehat{\mathcal{M}}_{ij}(x_i, x_j)$$

Sind die Eingangsgrößen Zufallsvariablen, so lässt sich die Varianz V definieren und gemäß der HDMR in eine Summe von Teilvarianzen (ANOVA-HDMR) zerlegen.

$$\text{Var}\left[\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})\right] = V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{1\le i<j\le n} V_{ij} \quad \rightarrow \quad S_{i\ldots j} = \frac{V_{i\ldots j}}{V}$$

Die Sensitivitätsindizes $S_{i\ldots j}$ quantifizieren den Einfluss der zugehörigen Eingangsvariablen.

4. Numerisches Beispiel

Als Beispiel dient eine geometrisch imperfekte Zylinderschale unter Axialdruck. Für die geometrischen Imperfektionen wird das unscharfe Korrelationsmodell

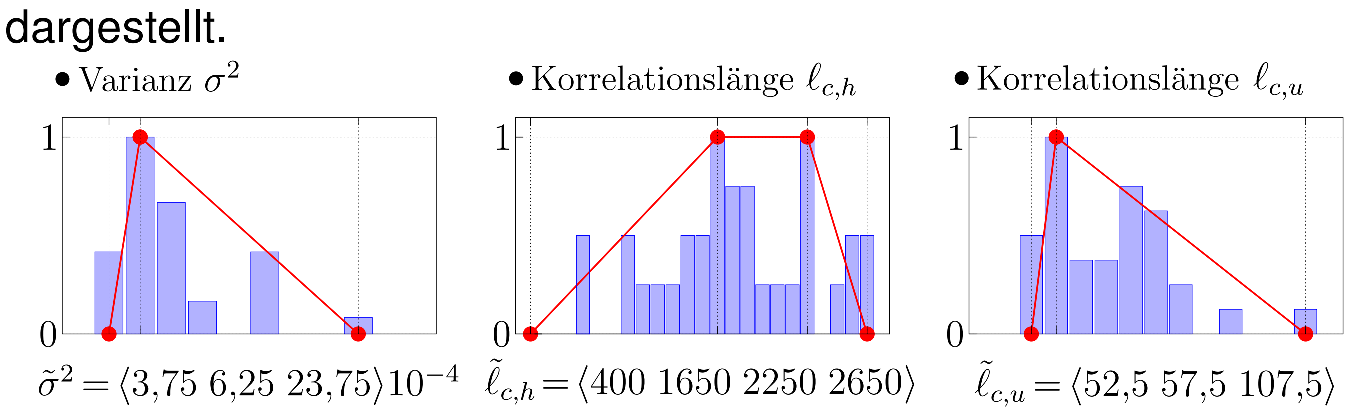
$$\tilde{C}(\Delta x, \Delta y) = \tilde{\sigma}^2 \tilde{\rho}(\Delta x)\, \tilde{\rho}(\Delta y)$$

mit den unscharfen Autokorrelationsfunktionen für die Höhen- und Umfangsrichtung verwendet.

$$\tilde{\rho}\left(\Delta x, \tilde{\ell}_{c,h}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{\tilde{\ell}_{c,h}}\right)$$

$$\tilde{\rho}\left(\Delta y, \tilde{\ell}_{c,u}, T\right) = \left(1 - \frac{\Delta y}{\tilde{\ell}_{c,u}}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi\Delta y}{T}\right)$$

Als unscharfe Eingangsvariablen dienen die Varianz σ^2, die Korrelationslänge $\ell_{c,h}$ in Höhenrichtung und die Korrelationslänge $\ell_{c,u}$ in Umfangsrichtung. Die Fuzzifizierung ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Das Ergebnis (li.) zeigt den Mittelwert der Beullast als Fuzzy-Ausgangsgröße. Die verschiedenen Metamodelle bilden die unscharfen Eingangsgrößen ähnlich auf die unscharfe Ergebnisgröße ab. Die Sensitivitätsanalyse (re.) zeigt, dass die Korrelationslänge $\ell_{c,u}$ in Umfangsrichtung im Gegensatz zu den anderen Eingangsvariablen σ^2 und $\ell_{c,h}$ nur einen sehr geringen Einfluss auf den Mittelwert der Beullast aufweist.