

# Entwicklung eines elasto-plastischen Bernoulli-Stabelements für die dynamische FE-Modellierung von Stahl-Rahmentragwerken

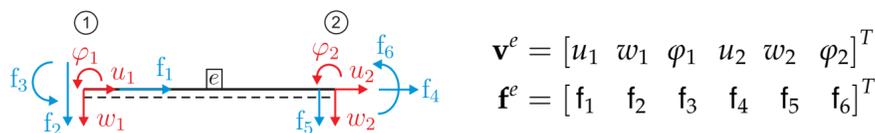
Maximilian Pawlik

## 1. Motivation und Ziele

Das vollständige Plastifizieren von Querschnitten kann durch Fließgelenke modelliert werden. Die Abbildung elasto-plastischen Materialverhaltens kann für die Steigerung der rechnerischen Tragfähigkeit von Baukonstruktionen relevant sein. Durch die Ausbildung der Fließgelenke ändert sich auch das dynamische Verhalten des Tragwerks, was im Rahmen dieser Arbeit untersucht wird.

## 2. Ein nichtlineares Bernoulli-Stabelement

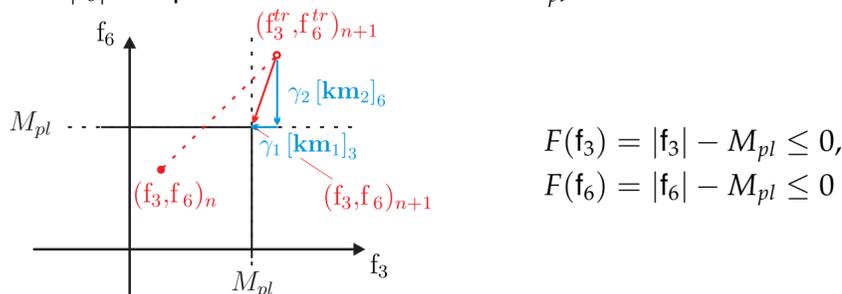
Die nichtlineare Modellierung erfolgt innerhalb der FEM anhand eines Stabelements nachfolgend dargestellter Form.



Für kleine Deformationen wird die additive Zerlegung der Verschiebung in einen elastischen und einen plastischen Anteil postuliert. Das elastische Teilstoffgesetz mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{v}^{el} = \mathbf{k} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{pl})$$

behält im elastischen Bereich seine Gültigkeit. Die Fließbedingung  $F(f_i) = 0$  ist erfüllt und das Fließen beginnt, wenn die Momente  $|f_3|$  und  $|f_6|$  das plastische Grenzmoment  $M_{pl}$  erreichen.



Die Entwicklung der plastischen Deformation wird in der Fließregel

$$\mathbf{v}_{n+1}^{pl} = \mathbf{v}_n^{pl} + \gamma_1 \frac{dF(\mathbf{f}_{n+1})}{df_3} + \gamma_2 \frac{dF(\mathbf{f}_{n+1})}{df_6} = \mathbf{v}_n^{pl} + \gamma_1 \mathbf{m}_1 + \gamma_2 \mathbf{m}_2$$

mit den Projektionsfaktoren  $\gamma_i$  und den Fließrichtungen  $\mathbf{m}_i$  für  $i = 1, 2$  unter Einhaltung der Konsistenzbedingung definiert. Zur numerischen Berechnung wird das Prädiktor-Korrektor-Verfahren angewandt. Im Prädiktorschritt wird unter der Annahme linearen Materialverhaltens der Versuchsvektor der inneren Kräfte

$$\mathbf{f}_{n+1}^{tr} = \mathbf{k} \mathbf{v}_{n+1}^{tr} = \mathbf{k} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^{pl})$$

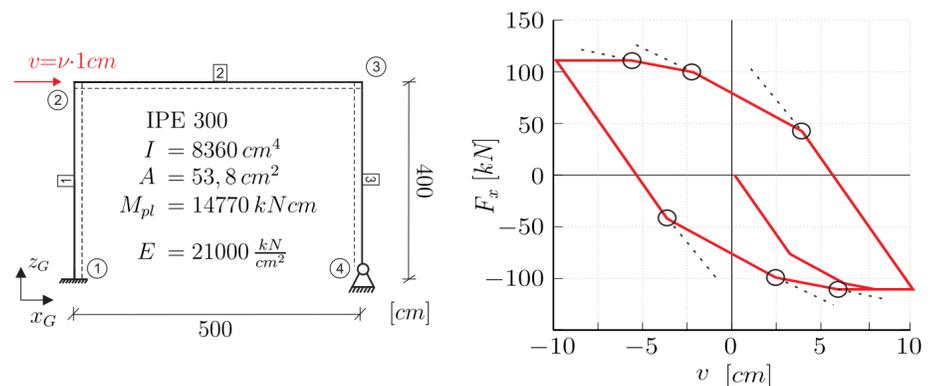
aufgestellt und auf Einhaltung der Fließbedingung überprüft. Im Korrektorschritt wird das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \mathbf{k} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_1^T \mathbf{k} \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_2^T \mathbf{k} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2^T \mathbf{k} \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |f_{3,n+1}| - M_{pl} \\ |f_{6,n+1}| - M_{pl} \end{bmatrix}$$

nach  $\gamma_i$  aufgelöst. Für  $F(f_i) \leq 0$  ist  $\gamma_i = 0$ . Durch das entstandene Fließgelenk ändert sich die Steifigkeit und es resultiert die tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_T = \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\mathbf{v}^{tr}} + \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\gamma_1} \left( \frac{d\gamma_1}{d\mathbf{v}^{tr}} \right) + \frac{d\mathbf{f}_{n+1}}{d\gamma_2} \left( \frac{d\gamma_2}{d\mathbf{v}^{tr}} \right).$$

## 3. Statische Berechnung eines Rahmens



Bei der statischen Berechnung des oben abgebildeten Rahmentragwerks unter schrittweiser Verschiebungssteigerung lässt sich in der Last-Verschiebungs-Kurve klar das nichtlineare Verhalten bei Eintreten der Fließgelenke erkennen. Nach der Belastung über die Traglast hinaus wird das System ausschließlich plastisch deformiert, die Entlastung erfolgt vollständig elastisch. Bei zyklischer Belastung wird nach dem Erstbelastungspfad eine Hysterese erhalten.

## 4. Dynamische Untersuchung

Zur Modellierung der Massenträgheit werden die Geschossmassen in Massenpunkten  $M_j$  diskretisiert. Damit wird die Lumped Massmatrix  $\mathbf{M}$  gebildet. Schwingfähige Systeme besitzen die Eigenfrequenzen  $f_i$ . Die semidiscrete Bewegungsdifferentialgleichung einer erzwungenen Schwingung lautet

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{P}(t).$$

Ein eingespannter Rahmen wird durch eine harmonische Fußpunkterregung  $w(t) = w_0 \sin(2\pi f_E t)$  mit  $w_0 = 8 \text{ cm}$  und  $f_E = 0,2505 \frac{1}{s}$  im Resonanzfrequenzbereich  $f_i = f_E$  belastet. Das Resonanzverhalten wird durch eine Verschiebung der Ruhelage abgeschwächt, um welche das System elastisch schwingt. Die Verlagerung ist als Verschiebung des elastischen Bereichs zu interpretieren. Der horizontale Verschiebungsverlauf  $v(t)$  von Knoten 2 resultiert wie nachfolgend dargestellt.

