

Stochastische geometrisch nichtlineare Strukturanalysen mit der Scaled-Boundary Finite-Elemente-Methode

Luigi Norbert Schiano

1. Einführung

Insbesondere in der Luft- und Raumfahrt oder dem Leichtbau werden oft dünnwandige, schlanke Strukturen eingesetzt, welche in der Regel stabilitätsgefährdet sind. Die realistische Erfassung des mechanischen Verhaltens macht eine Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte zwingend erforderlich. Gleichzeitig wirken sich bereits geringe Abweichungen der Geometrie- und Materialparameter signifikant auf das Strukturverhalten aus. Die Quantifizierung des Einflusses solcher Unschärfen mittels stochastischer Strukturanalysen spielt daher eine wichtige Rolle.

2. Scaled-Boundary Finite-Elemente-Methode

Die *Scaled-Boundary Finite-Elemente-Methode* (SBFEM) [4] bietet aufgrund ihrer semi-analytischen Natur eine vielversprechende Alternative zur herkömmlichen Finite-Elemente-Methode (FEM). Das Grundkonzept der SBFEM besteht darin, das Elementgebiet Ω_e durch eine kontinuierliche Skalierung des Randes $\partial\Omega_e$ bezogen auf ein Skalierungszentrum O zu beschreiben, siehe Abbildung 1.

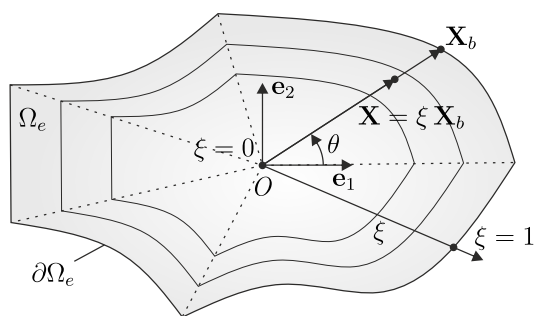


Abbildung 1: Skalierung des Elementrandes $\partial\Omega_e$ bezüglich des Skalierungszentrums O

Mit der Einführung von Scaled-Boundary-Koordinaten in Radial- und Umfangsrichtung ist es möglich, ausschließlich den Rand eines finiten Elementes zu diskretisieren. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lässt sich dann zu einem System von Differentialgleichungen umformen, deren Lösung im geometrisch und materiell linearen Fall analytisch möglich ist.

3. Geometrisch nichtlineare Problemstellungen

Praktikable Ansätze, um geometrische Nichtlinearitäten im Rahmen der SBFEM zu berücksichtigen, basieren auf der Konstruktion bestimmter Ansatzfunktionen, welche in einer herkömmlichen Finite-Elemente-Analyse verwendet werden können. Dabei ist es möglich, die aus der SBFEM resultierenden semi-analytischen Ansatzfunktionen zu verwenden, siehe Behnke et al. [1]. Weiterhin lassen sich

durch die zusätzliche Diskretisierung der Radialrichtung polynomielle Ansatzfunktionen erzeugen, wie in Klinkel und Reichel [3] beschrieben. In Abbildung 2 sind zwei quadratische polynomielle Ansatzfunktionen eines regelmäßigen Fünfecks dargestellt.

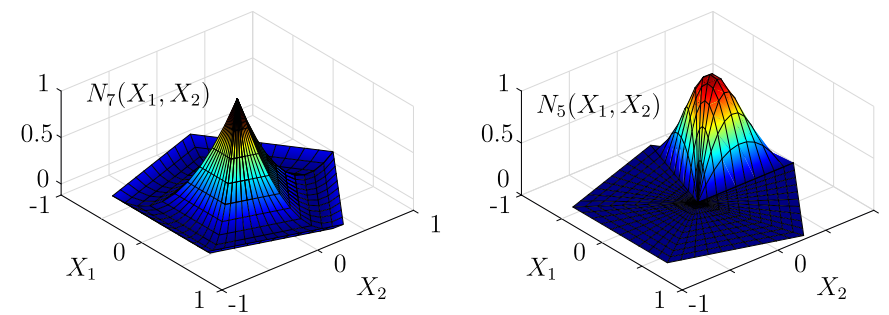


Abbildung 2: Quadratische polynomielle Ansatzfunktionen eines regelmäßigen Fünfecks

4. Spektrale Stochastische Finite-Elemente-Methode

Unschärfen können in der SBFEM ebenfalls berücksichtigt werden. Hierfür wird die *spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode* (SSFEM) von Ghanem und Spanos [2] verwendet. Dabei liegt der Fokus auf aleatorischen Unschärfen, also zufälligen, natürlichen Schwankungen der Material- oder Geometrieparameter. In der Unschärfequantifizierung erfolgt die Modellierung aleatorischer Unschärfe mittels Zufallsvariablen. Deren Berücksichtigung in dem der FEM zugrundeliegenden Randwertproblem führt auf stochastische partielle Differentialgleichungen (SPDE). Die SSFEM approximiert die Lösung einer SPDE durch die Darstellung der Zufallsvariablen $Z(\omega)$ als *polynomielle Chaosentwicklung* (PCE)

$$Z = \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\omega) \quad (1)$$

Dabei sind z_{α} deterministische Koeffizienten und Ψ_{α} orthonormale Basispolynome. Mit den erwähnten polynomiellen Ansatzfunktionen wird ein allgemeines Schalenelement für moderate Rotationen und kleine Verzerrungen hergeleitet und auf die SSFEM erweitert.

5. Numerisches Beispiel

Betrachtet wird ein Zylindersegment unter Einzellast mit anisotropem geschichteten Aufbau aus drei Lagen der Dicke $d/3$ und der Schichtfolge $[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$, siehe Abbildung 3. Dabei bedeutet 0° eine Faserichtung in e_1 -Richtung.

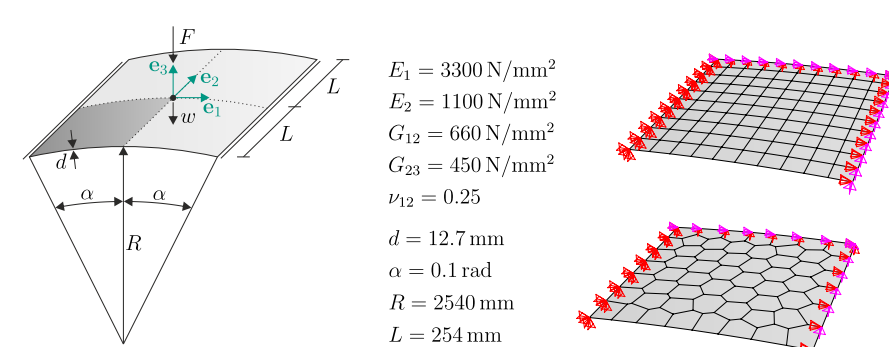


Abbildung 3: Geometrie und Materialparameter sowie zwei Diskretisierungen des Zylindersegments

Die Parameter des transversal isotropen Materials, die geometrischen Abmessungen sowie zwei verwendete Diskretisierungen mit einem regulären Netz und einem Polygonnetz sind ebenfalls in Abbildung 3 dargestellt.

Im Vergleich zu einer herkömmlichen linearen Verschiebungsformulierung mit Bathe-Dvorkin-Ansatz $Q1/BD$ zeigt sich, dass die Scaled-Boundary-Schalenelementformulierung mit quadratischen Ansatzfunktionen in Umfangs- und Radialrichtung $Q22/PA$ bzw. $P22/PA$ ähnliche Ergebnisse liefert.

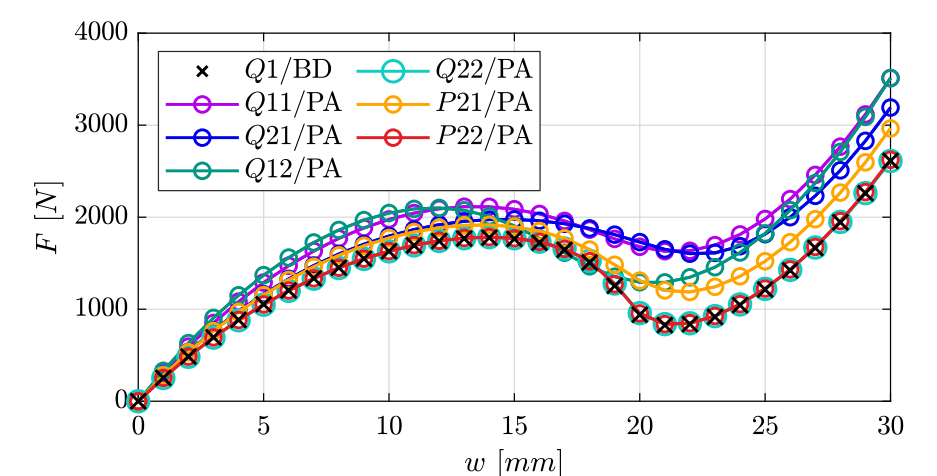


Abbildung 4: Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven zwischen einer herkömmlichen Elementformulierung und der Elementformulierung mit polynomiellen Ansatzfunktionen

Für stochastische Eingangsgrößen zeigt die Gegenüberstellung mit einer Monte-Carlo-Simulation, dass die stochastische Schalenformulierung die zufallsverteilte Systemantwort gut abbilden kann. Dabei hat der gewählte Polynomgrad einen maßgebenden Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse sowie auf den Berechnungsaufwand.

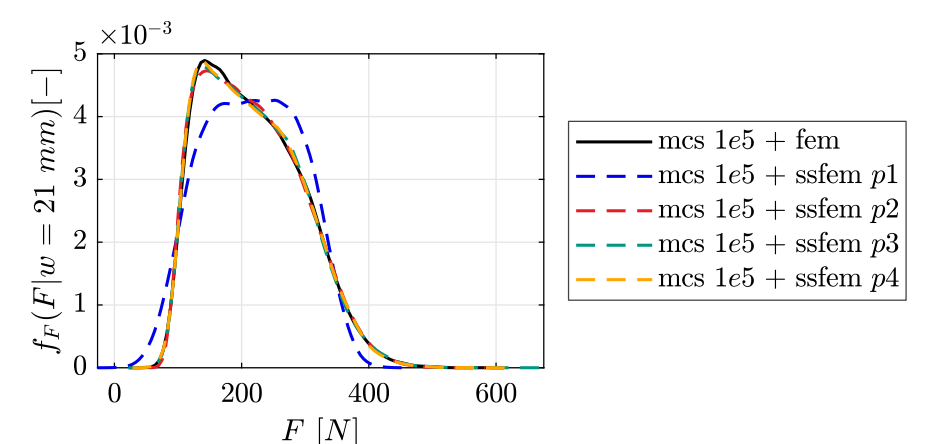


Abbildung 5: Dichtefunktion f_F der Reaktionskraft F bei einer Verschiebung $w = 21$ mm für verschiedene Polynomgrade der PCE

Literatur

- [1] Behnke, R. / Mundil, M. / Birk, C. / Kaliske, M.: *A physically and geometrically nonlinear scaled-boundary-based finite element formulation for fracture in elastomers*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 99(13) (2014), p. 966–999.
- [2] Ghanem, R. G. / Spanos, P. D.: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer New York, 1991.
- [3] Klinkel, S. / Reichel, R.: *A finite element formulation in boundary representation for the analysis of nonlinear problems in solid mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 347 (2019), p. 295–315.
- [4] Song, C.: *The scaled boundary finite element method: Introduction to theory and implementation*. Wiley, 2018.