

Isogeometrische FE-Formulierung eines ebenen gekrümmten Stabes

Luigi Norbert Schiano

1. Einführung

Gekrümmte Tragstrukturen finden sich in vielen technischen Bereichen. Ihre Modellierung kann über die Verwendung einer ausreichenden Anzahl von geraden Elementen realisiert werden. Eine effizientere und genauere Möglichkeit bietet die Verwendung gekrümmter Elemente, welche die gekrümmte Geometrie berücksichtigen. Im Kontext gekrümmter Strukturen sind neuartige Methoden wie die Isogeometrische Analyse (IGA) ebenso von großem Interesse. In der IGA werden für die Berechnung anstelle der klassischen Ansatzfunktionen der FEM splinebasierte Basisfunktionen aus dem CAD-Bereich verwendet. Diese sogenannten nicht-uniformen rationalen B-Splines (NURBS) sind in der Lage die Strukturgeometrie, z.B. einen Kreisbogen, exakt zu beschreiben.

2. Gekrümmte Stabformulierung

Die Herleitung der Differentialgleichungen des gekrümmten Stabes erfolgt unter Betrachtung der Kinematik, des Gleichgewichts und des Materialgesetzes. Im linear elastischen Fall gilt wie auch für den geraden Stab das Hooke'sche Gesetz. Die Gleichgewichtsbedingungen ändern sich für den gekrümmten Stab zu

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R(s)} + n = 0, \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R(s)} + q = 0, \quad \frac{dM}{ds} - Q + m = 0,$$

wobei R der Krümmungsradius und s der Bahnparameter ist. Für den geometrisch linearen Fall gelten für die Theorie nach Timoshenko folgende Verzerrungsmaße:

$$\varepsilon = u_{,s} - \frac{w}{R(s)}, \quad \gamma = w_{,s} + \frac{u}{R(s)} + \beta, \quad \kappa = \beta_{,s}.$$

3. Isogeometrische Analyse (IGA)

In der IGA werden für die FE-Berechnung NURBS als Ansatzfunktionen verwendet:

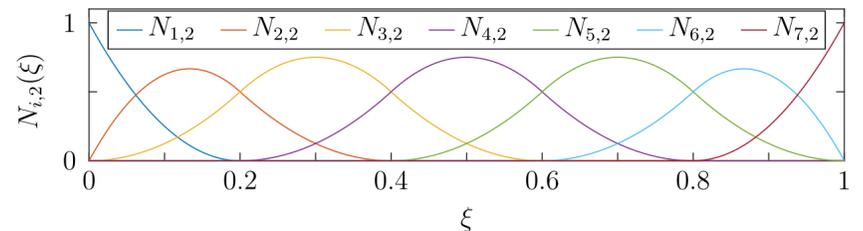
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi)w_j},$$

mit Gewichten $w_i > 0$ und B-Spline-Basisfunktionen

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi).$$

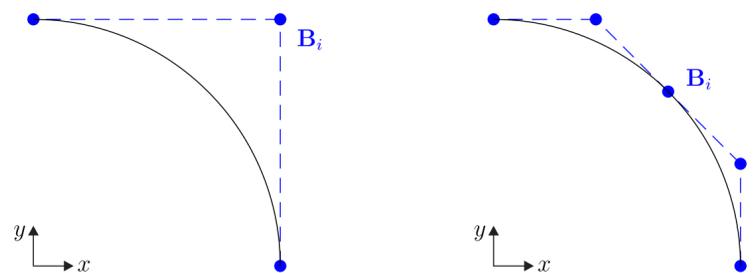
Diese werden auf einem Knotenvektor $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ mit $\xi_i \leq \xi_{i+1}$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ definiert. Nachfolgend sind quadratische B-Splines mit dem Knotenvektor $\Xi = [0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1]$ dargestellt.



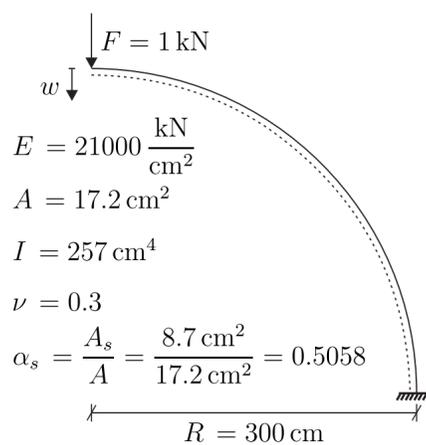
Für eine NURBS-Kurve werden zudem Kontrollpunkte \mathbf{B}_i benötigt:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Nachfolgend ist ein Viertelkreis als NURBS-Kurve mit drei bzw. fünf Kontrollpunkten zu sehen. Diese sogenannte h-Verfeinerung entspricht in der klassischen FEM der Wahl von mehr Elementen.



4. Numerisches Beispiel



Als Beispiel wird das Konvergenzverhalten von einem geraden und von einem gekrümmten FEM-Element mit jeweils quadratischen Ansätzen, sowie des quadratischen IGA-Elementes an dem dargestellten Bogenträger mit Viertelkreis-Geometrie untersucht. Dafür sind im folgendem Diagramm die normierten Ergebnisse über die Freiheitsgrade aufgetragen.

Es ist zu erkennen, dass das gekrümmte FEM-Element sehr schnell gegen die Referenzlösung konvergiert. Das IGA-Element konvergiert deutlich schneller als das gerade FEM-Element, jedoch etwas langsamer als das gekrümmte FEM-Element gegen die Referenzlösung.

