Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
S. Freitag

Stochastische FE-Formulierung eines geometrisch nichtlinearen 2D-Timoshenko-Stabelementes

Matthias Schlachter

1. Motivation und Ziel

In der Realität sind Materialparameter, z.B. der E-Modul, mit Unschärfen behaftet. Von diesen Parametern abhängige Größen, z.B. Verschiebungen, streuen daher ebenfalls. Im Rahmen der Finite-Element-Methode (FEM) ist es wichtig diese Unschärfen zu berücksichtigen. Von Interesse sind insbesondere die stochastischen Momente, z.B. der Mittelwert und die Standardabweichung, der Verschiebungen. Eine Alternative zur aufwendigen Monte-Carlo-Simulation (MCS) stellt die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) dar. In der Spektralen stochastischen FEM (SSFEM) wird die PCE direkt in die FEM integriert. Für die Bestimmung stochastischer Momente ist somit eine deterministische Berechnung ausreichend.

2. Chaosentwicklung von Zufallsvariablen

Im Rahmen der PCE werden Zufallsvariablen mittels Polynomen approximiert. Die PCE wird hier am Beispiel eines normalverteilten E-Moduls $E(\omega)$ gezeigt. Der gewählte Polynomgrad P bestimmt die Genauigkeit der Darstellung und den benötigten Rechenaufwand. Die Koeffizienten E_k gilt es zu ermitteln. Ψ_k sind bekannte Polynombasen. Diese sind abhängig von der Verteilung der Zufallsvariablen und müssen orthogonal bezüglich deren Dichtefunktion $f(x)$ sein. Für normalverteilte Zufallsvariablen werden deshalb Hermite-Polynome genutzt. Der Vorteil der PCE zeigt sich in der Bestimmung der stochastischen Momente. Liegt die Zufallsvariable als PC-Entwicklung vor, lassen sich diese direkt aus den Koeffizienten bestimmen.

PC-Entwicklung von E :

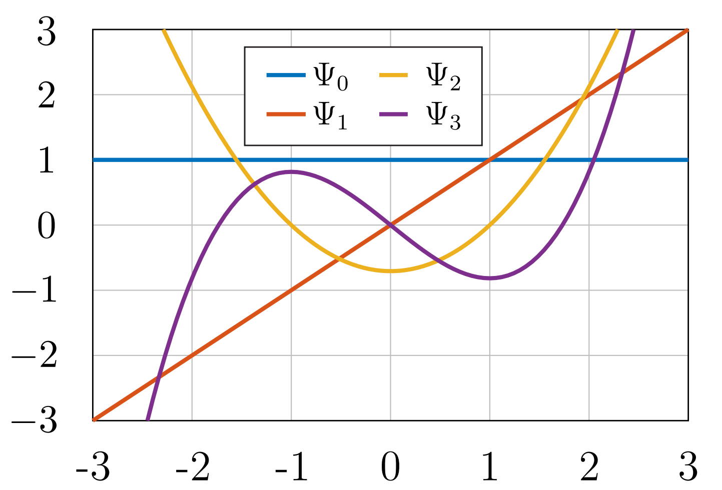
$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{P} E_k \Psi_k$$

Erwartungswert:

$$\mu = E_0$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{P} E_k^2$$



Hermite-Polynome

3. SSFEM für einen 2D-Timoshenko-Stab

Ausgehend vom stochastischen PVV wird eine geometrisch nichtlineare stochastische FE-Formulierung für ein 2D-Timoshenko-Stabelement hergeleitet.

$$\delta\Pi(\omega) = \int_{\Omega}\int_{0}^{L} (\delta\varepsilon EA\varepsilon + \delta\kappa EI\kappa + \delta\gamma GA_S\gamma)\,dx\,d\omega$$
$$- \int_{\Omega}\int_{0}^{L} (\delta u q_x - \delta w q_z)\,dx\,d\omega \overset{!}{=} 0$$

Es werden die nichtlinearen Verzerrungsmaße nach Green-Lagrange und die 2.Piola-Kirchhoff Schnittkräfte gewählt.

Das stochastische PVV muss zunächst linearisiert werden.

$$L[\delta\Pi(\omega)] = \delta\Pi_{int}(\omega) + \Delta\delta\Pi_{int}(\omega) + \delta\Pi_{ext}(\omega) \overset{!}{=} 0$$

Zufallsvariablen werden mittels der PCE diskretisiert. Die Verschiebungen des 2-Knoten-Elementes werden mit linearen Ansatzfunktionen $N_1 = 1 - \frac{x}{L}$ und $N_2 = \frac{x}{L}$ sowie den stochastischen Knotenverschiebungen $\boldsymbol{v}(\omega)$ approximiert.

$$\boldsymbol{u}(\omega) = \sum_{I=1}^{2} N_I \boldsymbol{v}_I(\omega) = \sum_{I=1}^{2} N_I \sum_{k=0}^{P} \boldsymbol{v}_{Ik}\Psi_k$$

Die PC-Koeffizienten der Knotenverschiebungen sind:

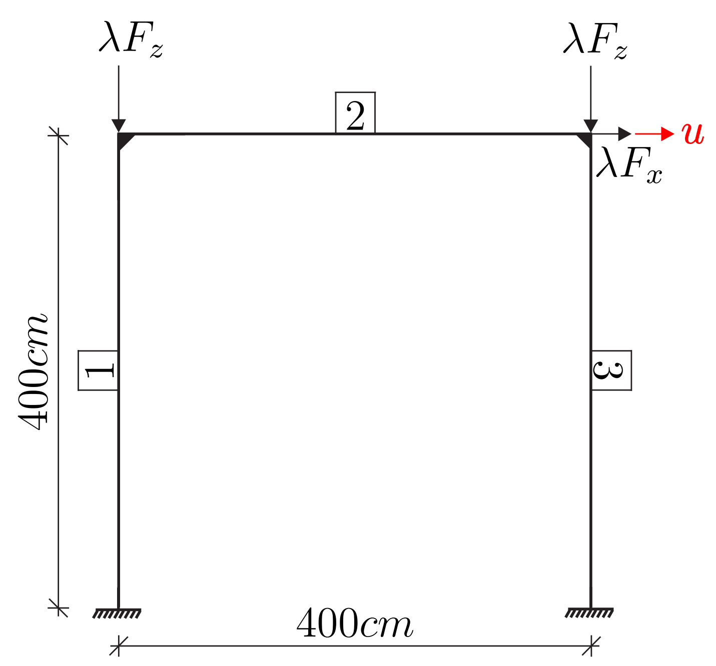
$$\boldsymbol{v}_{Ik} = \begin{bmatrix} u_{Ik} & w_{Ik} & \beta_{Ik} \end{bmatrix}^T$$

Nach der Assemblierung wird das globale Gleichungssystem erhalten.

$$\mathcal{K}_T \Delta\mathcal{V} = -\mathcal{G}$$

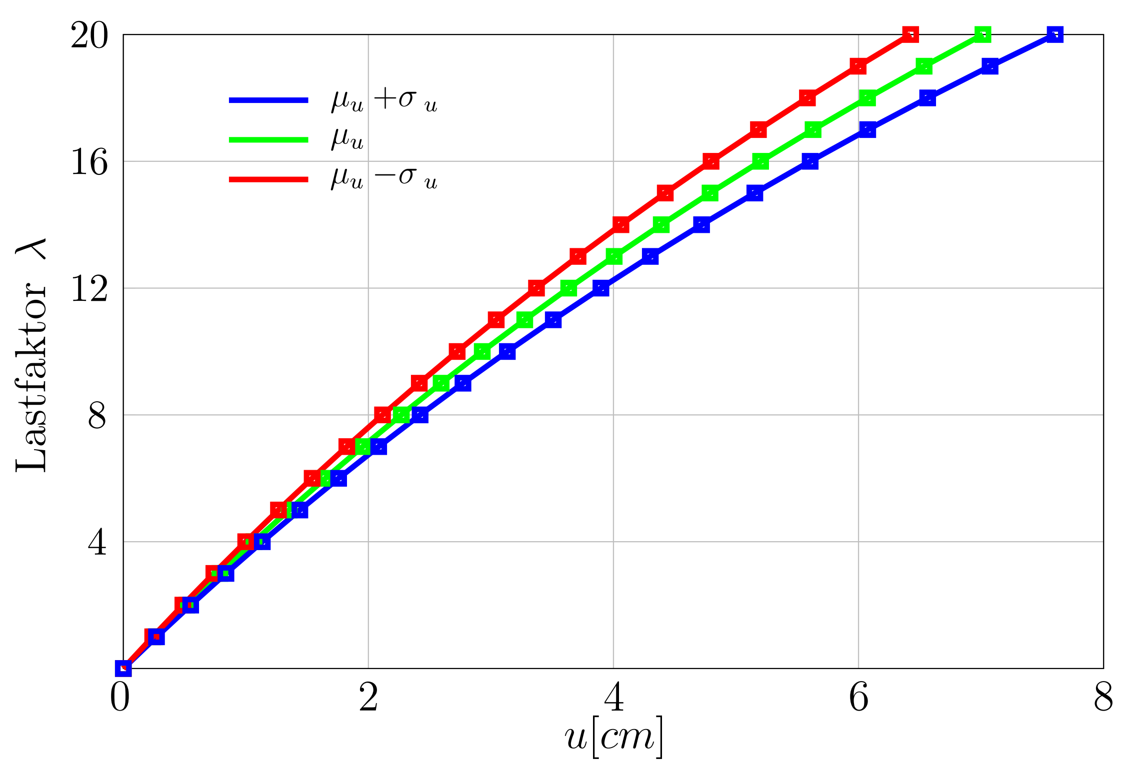
Hierbei entspricht $\mathcal{K}_T \in \mathbb{R}^{((P+1)\cdot ndof)\times((P+1)\cdot ndof)}$ der globalen Steifigkeitsmatrix, $\mathcal{G}$ dem globalen Residuum und $\Delta\mathcal{V}$ dem Vektor der Verschiebungsinkremente.

4. Numerisches Beispiel



Angaben:
HEA 200 Stahlträger
$A = 50$ cm^2
$I = 3700$ cm^4
$F_x = 5$ kN
$F_z = 50$ kN
$E \sim \mathcal{N}(21000, 2100)$ [kN/cm^2]

Für den Rahmen wird der Erwartungswert und die Standardabweichung der Verschiebung u bestimmt. Die E-Moduli der Stützen und des Riegels sind normalverteilt und stochastisch unabhängig.



Aufgrund der geometrisch nichtlinearen Stabformulierung werden die Stützen infolge der Druckspannung weicher. Mit steigender Druckbelastung nimmt die Streuung der Verschiebung zu.