Karlsruher Institut für Technologie

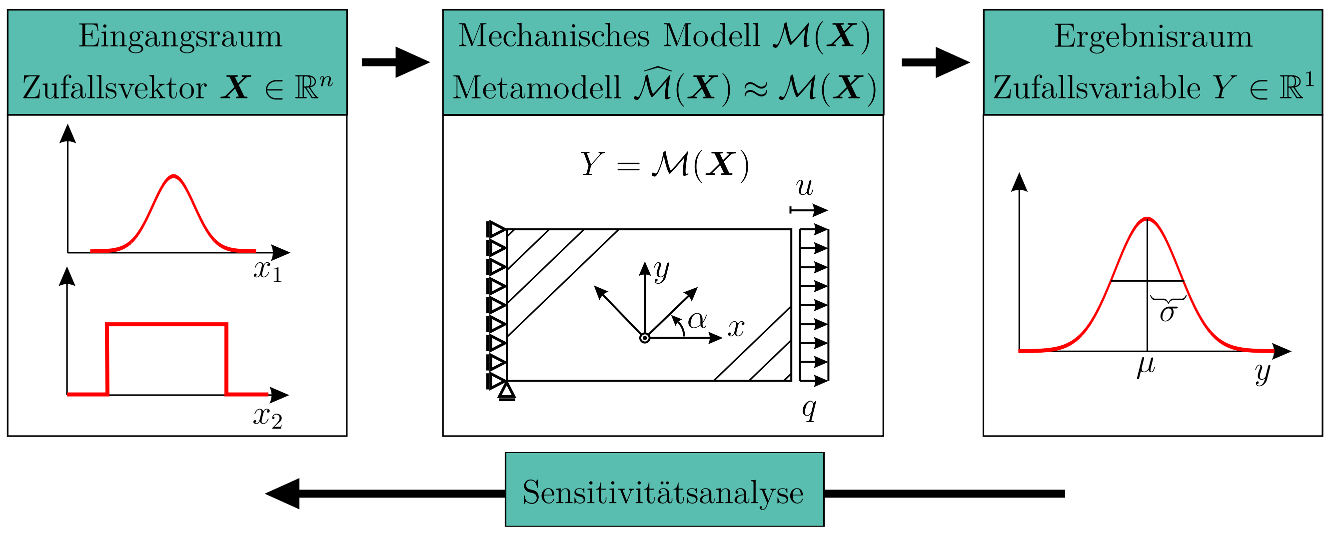
Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Polynomielle Chaosentwicklung und Sensitivitätsanalyse zur Quantifizierung von Unsicherheiten in der Tragwerksanalyse

Sophia Wiedemann

1. Einleitung

Eingangsgrößen mechanischer Strukturen, wie beispielsweise Material-, Geometrie- und Belastungsdaten, entsprechen in der Realität keinen deterministischen Werten, sondern sind mit einer natürlichen Unsicherheit behaftet. Diese kann mithilfe von Zufallsvariablen in der stochastischen Strukturanalyse berücksichtigt werden.



Die natürlichen Unsicherheiten der Eingangsgrößen übertragen sich auf die gesuchte Ausgangsgröße, wie etwa eine Verschiebung einer Struktur, welche sich abschließend durch stochastische Momente, wie Erwartungswert und Varianz, charakterisieren lässt. Mithilfe einer Sensitivitätsanalyse kann der Einfluss der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße quantifiziert werden.

2. Polynomielle Chaosentwicklung als Metamodell

Der hohe Zeit- und Rechenaufwand den die Auswertung mechanischer Modelle $\mathcal{M}(\boldsymbol{X})$ beispielsweise mit Standardmethoden wie der Monte Carlo Simulation (MCS) fordert, wird durch Verwendung sogenannter Metamodelle $\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{X})$ deutlich verringert. Diese stellen eine effizient auswertbare Approximation des Modells dar. Ein Vertreter hierfür ist die Polynomielle Chaosentwicklung (PCE). Diese ist eine Reihenentwicklung der Zufallsvariablen Y bezüglich speziellen multivariaten, orthonormalen Basispolynomen $\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X})$, mit α als Multiindex.

$$Y = \mathcal{M}(\boldsymbol{X}) \approx \widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{X})$$

Besonders bei der Bestimmung stochastisch wertvoller Größen sowie bei der Sensitivitätsanalyse zeigt sich der enorme Vorteil der PCE gegenüber anderen Methoden. Die zugehörigen Kennzahlen müssen nicht mehr gänzlich neu berechnet werden, sondern können aus einer simplen Nachbearbeitung der bereits konstruierten PCE gewonnen werden.

3. Nachbearbeitung der PCE

Stochastische Momente wie Erwartungswert und Varianz ergeben sich aus der PCE zu:

$$\mathbb{E}[\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})] = \hat{a}_0, \qquad Var[\widehat{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})] = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}\\ \boldsymbol{\alpha}\neq 0}} \hat{a}^2_{\boldsymbol{\alpha}}$$

Grundlage der globalen, varianzbasierten Sensitivitätsanalyse ist die Aufteilung des mechanischen Modells in Summanden steigender Ordnung entsprechend der sogenannten Sobol-Zerlegung:

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i(x_i) + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \mathcal{M}_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \mathcal{M}_{12\dots n}(\boldsymbol{x})$$

Die zugehörige Varianz D lässt sich in eine Summe aus Teilvarianzen aufteilen:

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} D_{i_1 i_2} + \dots + D_{12\dots n} \;\rightarrow\; S_{i_1\dots i_s} = \frac{D_{i_1\dots i_s}}{D}$$

Die Sobol-Indizes $S_{i_1\dots i_s}$ quantifizieren den Einfluss der Eingangsgrößen. Mithilfe der PCE ergeben sich diese zu:

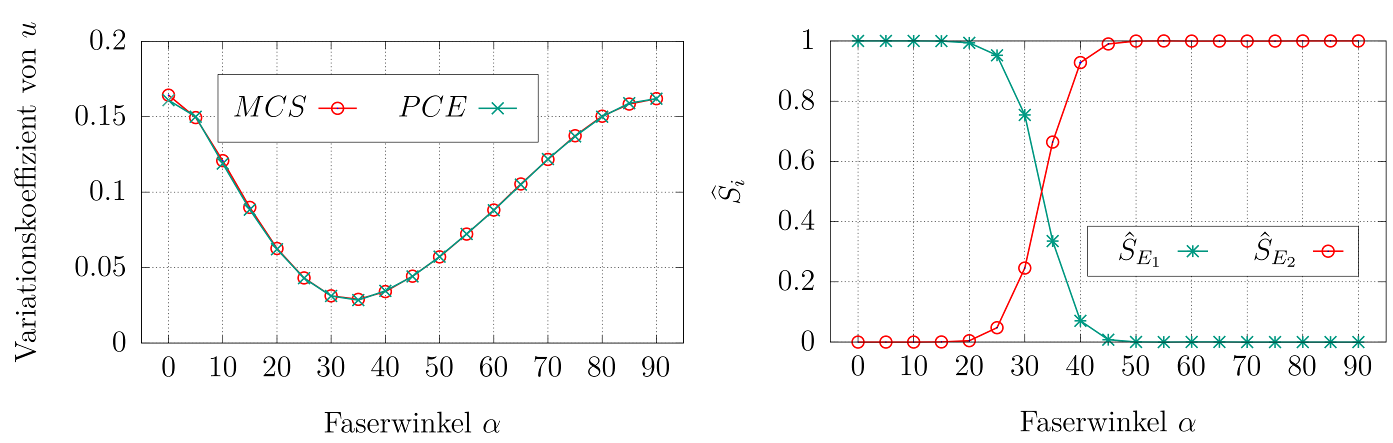
$$\hat{S}_{i_1\dots i_s} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{I}_{i_1,\dots,i_s}} \hat{a}^2_{\boldsymbol{\alpha}} \Big/ \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}\\ \boldsymbol{\alpha}\neq 0}} \hat{a}^2_{\boldsymbol{\alpha}}$$

4. Numerisches Beispiel

Es wird die Endverschiebung u einer einzelnen UD-Schicht unter einaxialer Zugbelastung mit einem Faserwinkel α im Bereich $[0°, 90°]$ untersucht. Als mit Unsicherheiten behaftete Eingangsgrößen dienen der E-Modul E_1 in Faserrichtung und der E-Modul E_2 quer zur Faserrichtung.

$$E_1 \sim \mathcal{N}(31100, 4665) \text{ und } E_2 \sim \mathcal{N}(7600, 1140)$$

Die Berechnung der stochastischen Momente zeigt, dass der erforderliche Rechenaufwand der PCE mit $n_{PCE} = 20$ Stichproben zur Konstruktion des Metamodells verglichen mit einer durchgeführten MCS mit $n_{MCS} = 1000$ Stichproben pro Faserwinkel, bei gleicher Genauigkeit der Ergebnisse deutlich geringer ausfällt.



Der Variationskoeffizient (li.) besitzt bei einem Faserwinkel $\alpha \cong 33°$ sein Minimum. Aus der Sensitivitätsanalyse (re.) wird deutlich, dass bei diesem Faserwinkel ebenfalls die Einflüsse der beiden E-Moduln identisch sind. Es ist also zu beobachten, dass die Streuung bei zunehmender Überlagerung des Einflusses beider E-Moduln sinkt.