Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Der Multi-Fidelity Ansatz im Rahmen der simulationsbasierten Zuverlässigkeitsanalyse

Theda Witte

1. Einführung und Motivation

Im Bauwesen wird die Standsicherheit von Bauwerken in der Regel mithilfe des semiprobabilistischen Sicherheitskonzepts nachgewiesen. Dabei werden Widerständen R und Einwirkungen E in einer Grenzfunktion

$$G = R - E$$

verglichen. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit eine simulationsbasierte Zuverlässigkeitsanalyse durchzuführen, die die Versagenswahrscheinlichkeit mithilfe numerischer Simulationen bestimmt. Die Anzahl der dazu nötigen Auswertungen des numerischen Modells lässt sich durch ein sogenanntes Metamodell reduzieren. Diese sind jedoch rein mathematische Approximationen und berücksichtigen kein Expertenwissen. Abhilfe soll der Multi-Fidelity Ansatz schaffen. Die Idee ist, ein vereinfachtes, „ingenieurmäßiges“ Grundmodell zu definieren, auf dessen Basis ein Metamodell erstellt wird.

2. Zuverlässigkeitsanalyse

Mithilfe der Zuverlässigkeitsanalyse kann die Versagenswahrscheinlichkeit P_f eines Systems berechnet werden, welches von Zufallsvariablen $\boldsymbol{X}$ abhängt. Die Grenzfunktion $G(\boldsymbol{X})$ trennt den Versagensbereich $G(\boldsymbol{X}) < 0$ vom sicheren Bereich $G(\boldsymbol{X}) > 0$. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird mit dem Integral der Dichtefunktion über den Versagensbereich

$$P_f = \int_{G(\boldsymbol{X})<0} f(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X}$$

berechnet. Zur Lösung des Integrals werden zwei verschiedene Methoden verwendet.

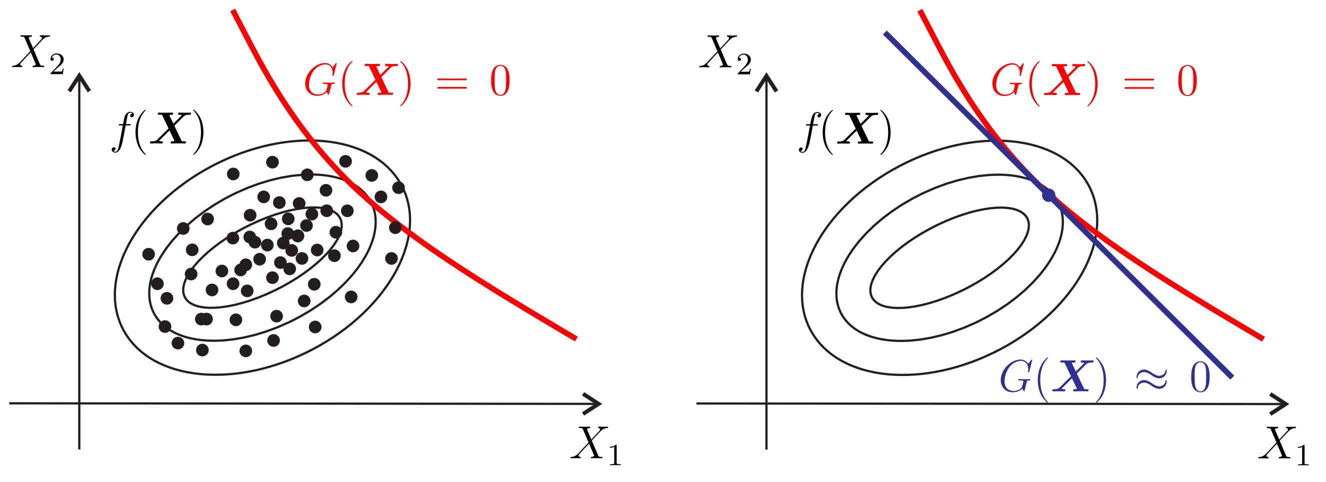

Abbildung 1: *MCS und FORM für zwei Zufallsvariablen*

Bei der Monte-Carlo-Simulation (MCS) werden Pseudozufallszahlen erzeugt, mit denen die Grenzfunktion ausgewertet wird. P_f berechnet sich aus dem Verhältnis der Simulationen mit $G(\boldsymbol{X}) < 0$ zur Gesamtanzahl. Zudem wird die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung (FORM) angewendet, bei der die Grenzfunktion linearisiert wird. Über eine Standardnormalverteilungstransformation kann der sogenannte Sicherheitsindex β so iterativ bestimmt werden, mit dem die Versagenswahrscheinlichkeit aus der Standardnormalverteilungstabelle abgelesen werden kann. Je kleiner die Versagenswahrscheinlichkeit ist, desto besser ist die Approximation.

3. Der Multi-Fidelity Ansatz für Metamodelle

Im Rahmen des Multi-Fideilty Ansatzes wird auf Basis des zu berechnenden Tragwerks, dem sogenannten High-Fidelity-Modell (HFM), ein vereinfachtes Modell, ein Low-Fidelity-Modell (LFM), erstellt. Das LFM spiegelt die wesentlichen physikalischen Eigenschaften des HFM wieder, ist jedoch weniger rechenintensiv. Das Metamodell wird nun nicht mehr für das HFM erstellt, sondern für den Fehler zwischen dem HFM und LFM, mit dem Ziel, diesen einfacher approximieren zu können. Die Auswertung findet nun am LFM statt und wird mithilfe des approximierten Fehlers ausgeglichen.

$$G(\boldsymbol{X}) = G_{HFM}(\boldsymbol{X}) \approx \begin{cases} G_{LFM}(\boldsymbol{X}) + \delta(\boldsymbol{X}) \\ G_{LFM}(\boldsymbol{X}) \cdot \gamma(\boldsymbol{X}) \end{cases}$$

Es wird zum einen die Differenz ε und das Verhältnis γ der beiden Modelle bestimmt und zwischen den Stützstellen approximiert. Als Interpolationsmethode wird die kubische Faltung verwendet.

4. Numerisches Beispiel

Als Beispiel wird die maximale Druckspannung am Lager eines harmonisch erregten Bogenträgers betrachtet. Die Dichte ρ und das Verhältnis der Bogenlänge L/h werden als stochastische Eingangsvariablen gewählt.

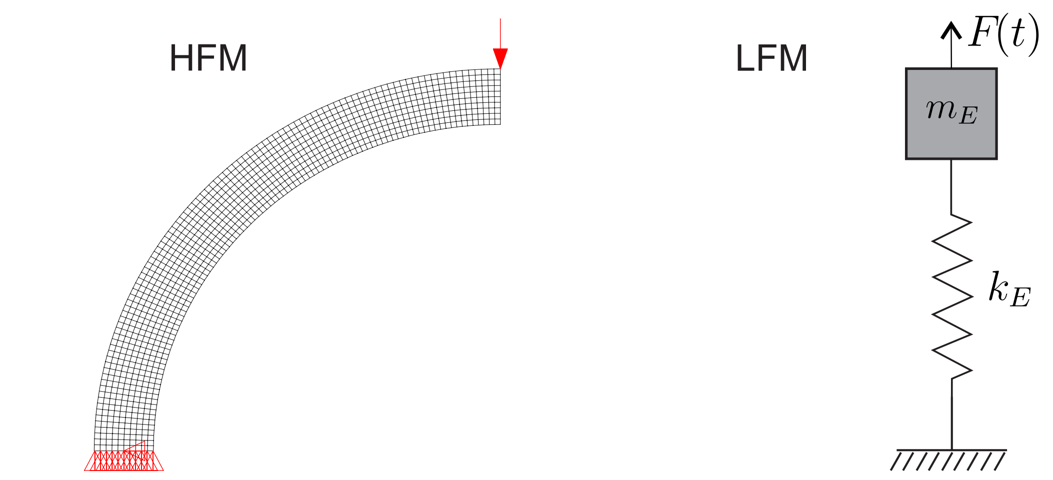

Abbildung 2: *HFM und LFM des numerischen Beispiels*

Dabei wird für das HFM eine Berechnung mit der Finiten-Elemente-Methode in FEAP durchgeführt. Als LFM wird die analytische Lösung eines Einmassenschwingers verwendet.

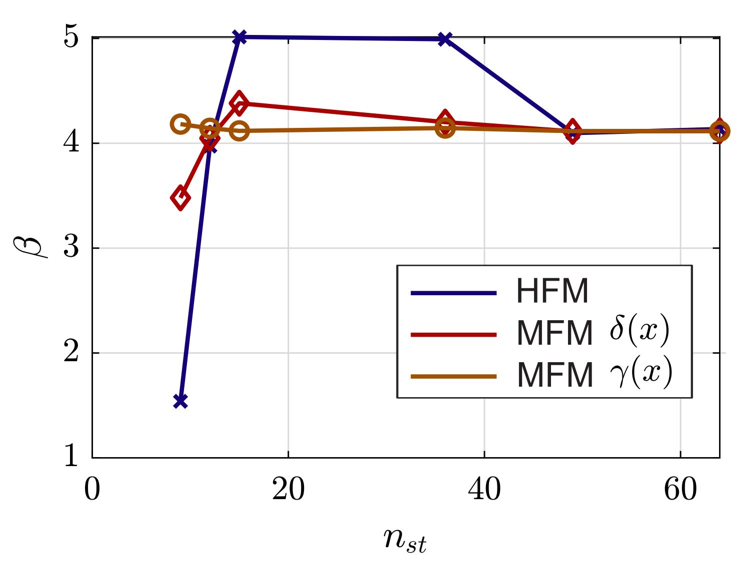

Abbildung 3: *Verlauf* $\beta(n_{st})$

Abbildung 3 stellt den Sicherheitsindex β für die unterschiedliche Anzahl an Stützstellen n_{st} der verschiedenen Methoden dar. Es ist zu erkennen, dass mit einem geeigneten LFM ein Zeitersparnis erreicht werden kann. Ist das gewählte LFM jedoch ungeeignet, bringt die MFM keinen Vorteil und führt gegebenenfalls sogar zu einer Erhöhung der Rechenzeit.