Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
habil. W. Wagner

Berechnung und Optimierung von Fachwerkstrukturen mittels analytischer und algorithmischer Methoden

Felix Zähringer

1. Motivation und Ziele

Wie sollten die Querschnittsflächen einer beliebigen Fachwerkstruktur gewählt werden, sodass die Gesamtmasse des Tragwerks minimal wird? Mit dieser Frage beschäftigte sich diese Arbeit, wobei unterschiedliche Methoden miteinander verglichen und in einem MATLAB-Programm implementiert wurden. Grundlage für die Querschnittsanpassung stellte dabei zunächst die Berechnung der Fachwerkstrukturen dar.
Im Folgenden wird beispielhaft die Querschnittsoptimierung mit dem Simplex-Verfahren genauer beschrieben.

2. Querschnittsoptimierung mit dem Simplex-Verfahren

Das Simplex-Verfahren ist ein Verfahren der Mathematischen Optimierung und ermöglicht es, die optimale Lösung für ein lineares Problem zu berechnen. Ein lineares Problem besteht dabei aus einer Zielfunktion und Nebenbedingungen, wobei die Optimierungsvariablen sowohl in der Zielfunktion, als auch in den Nebenbedingungen ausschließlich linear vorkommen dürfen.
Auch die Querschnittsanpassung lässt sich als lineares Problem formulieren. Die Zielfunktion entspricht dabei der Gesamtmasse des Tragwerks, welche minimiert werden soll:

$$Z = \sum_{i=1}^{nelem} \rho_i \cdot A_i \cdot L_i \rightarrow \text{Min!}$$

Dabei ist ρ_i die Dichte, A_i die Querschnittsfläche und L_i die Länge eines Stabes i.
Um die Zulässigkeit der optimalen Lösung zu gewährleisten, wird die Lösungsmenge durch drei Nebenbedingungen eingeschränkt.

Spannungsrestriktion: Die zulässige Stabkraft eines Stabes ist durch seine Streckgrenze und seine Querschnittsfläche beschränkt: $-f_y \cdot A \leq S \leq f_y \cdot A$. Mit der Abkürzung $\widetilde{S} = S + f_y \cdot A$ folgt $0 \leq \widetilde{S} \leq 2 \cdot f_y \cdot A$. In Matrix-Vektor-Schreibweise lässt sich diese Nebenbedingung auf alle Stäbe des Fachwerks erweitern:

$$\mathbf{0} \leq \widetilde{\boldsymbol{S}} \leq 2 \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{A}$$

Gleichgewichtsrestriktion: Ein Fachwerk befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gleichgewichtsbedingung $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}$ eingehalten ist. Dabei ist $\boldsymbol{G}$ die Gleichgewichtsmatrix und $\boldsymbol{F}$ der Lastvektor. Mit der zuvor definierten Abkürzung folgt:

$$\boldsymbol{G} \cdot \widetilde{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$$

Nichtnegativitätsbedingung: Die Querschnitte der Stäbe können keine negativen Werte annehmen. Es muss also gelten:

$$\boldsymbol{A} \geq 0$$

3. Beispiel

Das folgende 10-Stab-Fachwerk wird exemplarisch mit dem Simplex-Verfahren optimiert. Dabei seien für sämtliche Stäbe folgende Eigenschaften gegeben: $f_y = 23,5\ \frac{kN}{cm^2}$, $\rho = 0,0078\ \frac{kg}{cm^3}$.

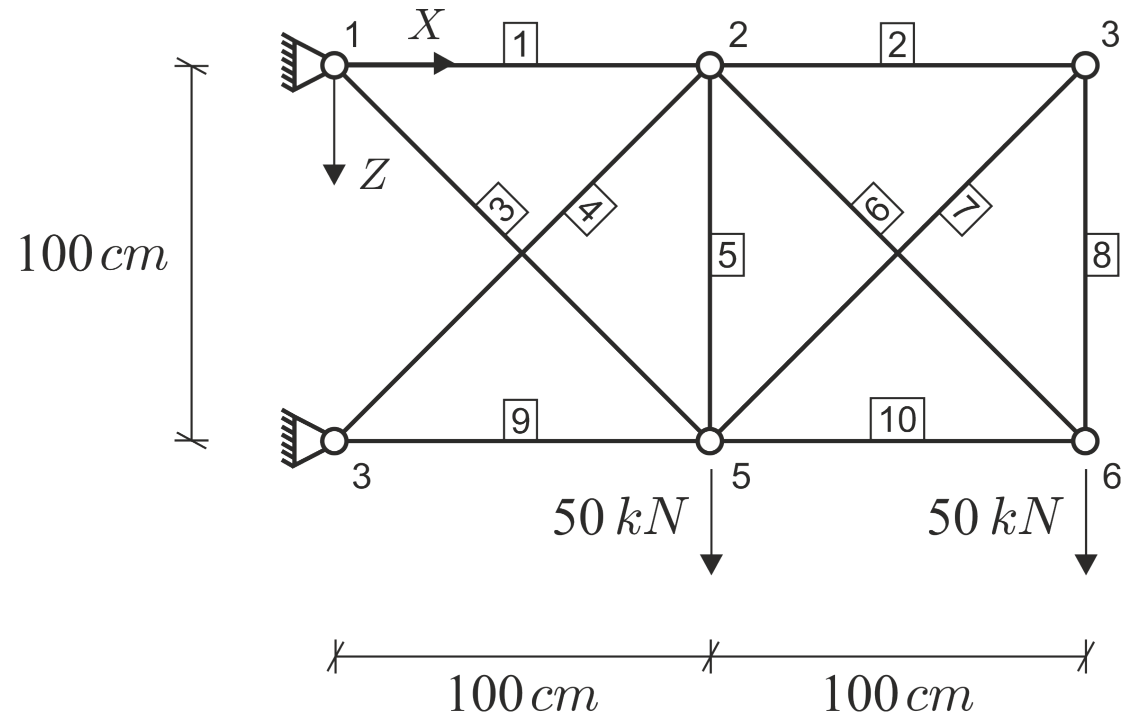

Abbildung 1: *10-Stab-Fachwerk*

Die Anwendung des Simplex-Verfahrens auf dieses Fachwerk liefert folgende optimale Querschnittsflächen:

Stab	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A\ [cm^2]$	4,26	0	3,01	3,01	0	3,01	0	0	4,26	2,13

Damit beträgt die minimal mögliche Gesamtmasse dieser Konstruktion 18,26 kg.

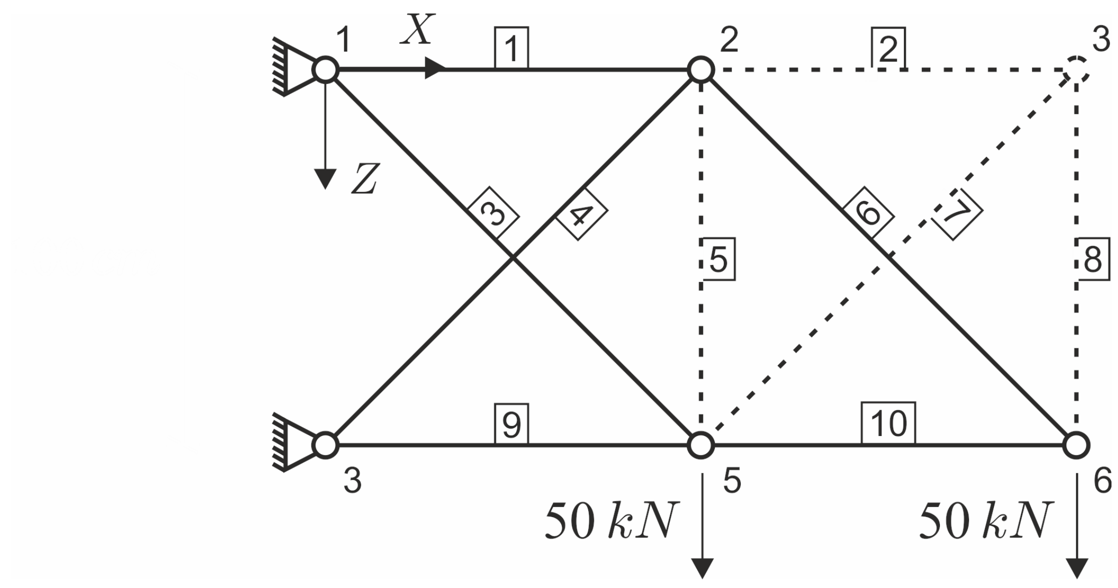

Abbildung 2: *Optimiertes 10-Stab-Fachwerk*