Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Baustatik
Leiter: Prof. Dr.-Ing.
S. Freitag

Ersatzmodellierung für polymorph unscharfe Zufallsfelder zur Optimierung von Schalentragwerken

Emily Zeller

1. Motivation und Ziele

Die Bemessung von Tragwerken geht mit einem Optimierungsprozess einher, wobei das Ziel in einer hohen Tragfähigkeit bei gleichzeitig geringem Materialverbrauch besteht. Die hieraus resultierenden dünnwandigen Strukturen sind stabilitätsgefährdet und in Realität durch geometrische Imperfektionen geprägt. Diese Imperfektionen können durch korrelierte Zufallsfelder modelliert werden, die sich unter Anwendung der *Karhunen-Loéve-Expansion* (KLE) erzeugen lassen. Die Ausprägung der Zufallsfelder wird maßgeblich durch den Parameter der Korrelationslänge ℓ_c gesteuert, der auch aus Messungen bestimmt werden kann. Da hierbei in der Regel keine ausreichende Datenmenge vorliegt, besteht eine epistemische Unschärfe der Korrelationslänge. Diese Unschärfe wird im Rahmen einer Optimierung mit Fuzzy-stochastischer Analyse berücksichtigt.

2. Karhunen-Loéve-Expansion

Die Reihenentwicklung der KLE

$$\hat{H}(\boldsymbol{x},\theta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\theta)\sqrt{\lambda_i}\,\varphi_i(\boldsymbol{x})$$

erfordert das Aufstellen der Korrelationsmatrix

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \rho(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_n) \end{bmatrix}$$

und die Berechnung der zugehörigen Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren φ_i. Zur Bestimmung der Korrelationsmatrix kann die quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion

$$\rho(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = \exp\left[-\frac{d^2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)}{\ell_c^2}\right]$$

verwendet werden, in welche die Korrelationslänge ℓ_c eingeht. Wird diese als unscharfer Eingangsparameter berücksichtigt, muss das Eigenwertproblem der Korrelationsmatrix für jede Korrelationslänge neu gelöst werden, was bei einer feinen Diskretisierung mit einem hohen Rechenaufwand verbunden ist. Zur Verkürzung der Rechenzeit kann vorab das Eigenwertproblem der KLE für diskrete ℓ_c gelöst und anschließend linear zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren verschiedener Korrelationslängen interpoliert werden. Dieses alternative Vorgehen ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

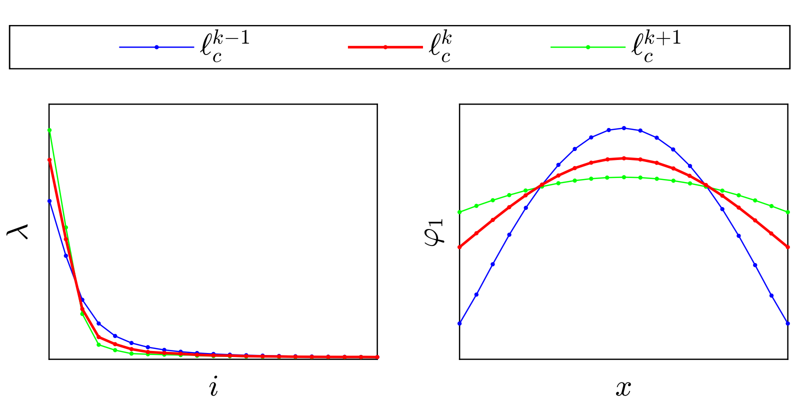

Abbildung 1: *Übersicht über das Vorgehen der Interpolationsmethode Int1*

Die Interpolationsmethode wird im Weiteren mit Int1 bezeichnet, während die Lösung des Eigenwertproblems mit EWP abgekürzt wird. Der zeitliche Vorteil der Methode Int1 wird gemäß Abbildung 2 insbesondere deutlich, wenn eine feine Diskretisierung mit m Elementen eingesetzt wird.

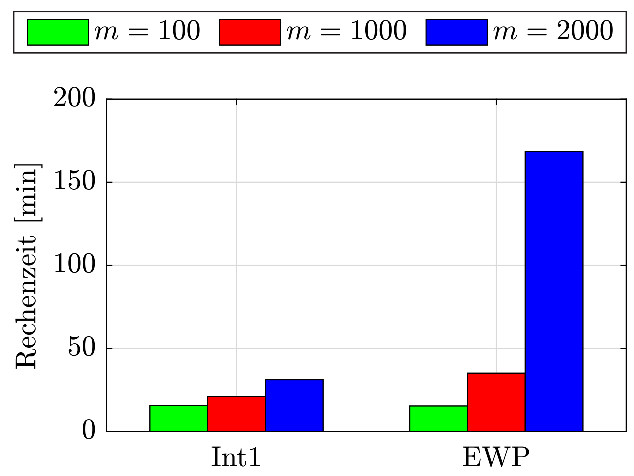

Abbildung 2: *Vergleich der Rechenzeit für verschiedene Diskretisierungen*

3. Programmtechnische Umsetzung

Zur Optimierung der Struktur werden innerhalb des Entwurfsraums Optimierungsstützstellen definiert, an denen jeweils eine Fuzzy-stochastische Analyse erfolgt. Im Rahmen der α-Level-Optimierung wird die Korrelationslänge als epistemisch unscharfe Fuzzy-Dreiecksvariable eingeführt. Die aleatorische Unschärfe wird durch eine *Monte-Carlo-Simulation* (MCS) berücksichtigt, bei der für jede Realisierung ein neues Zufallsfeld auf die Struktur aufgebracht und die zugehörige kritische Last P_{cr} bestimmt wird. Zur Verkürzung der Rechenzeit wird hierbei anstelle einer FE-Berechnung ein *artificial neural network* (ANN) als Ersatzmodell verwendet. Für die α-Level-Optimierung sowie die finale Optimierung der Struktur wird jeweils ein lineares Least-Square-Ersatzmodell entwickelt. Eine Übersicht über das beschriebene Vorgehen ist Abbildung 3 zu entnehmen.

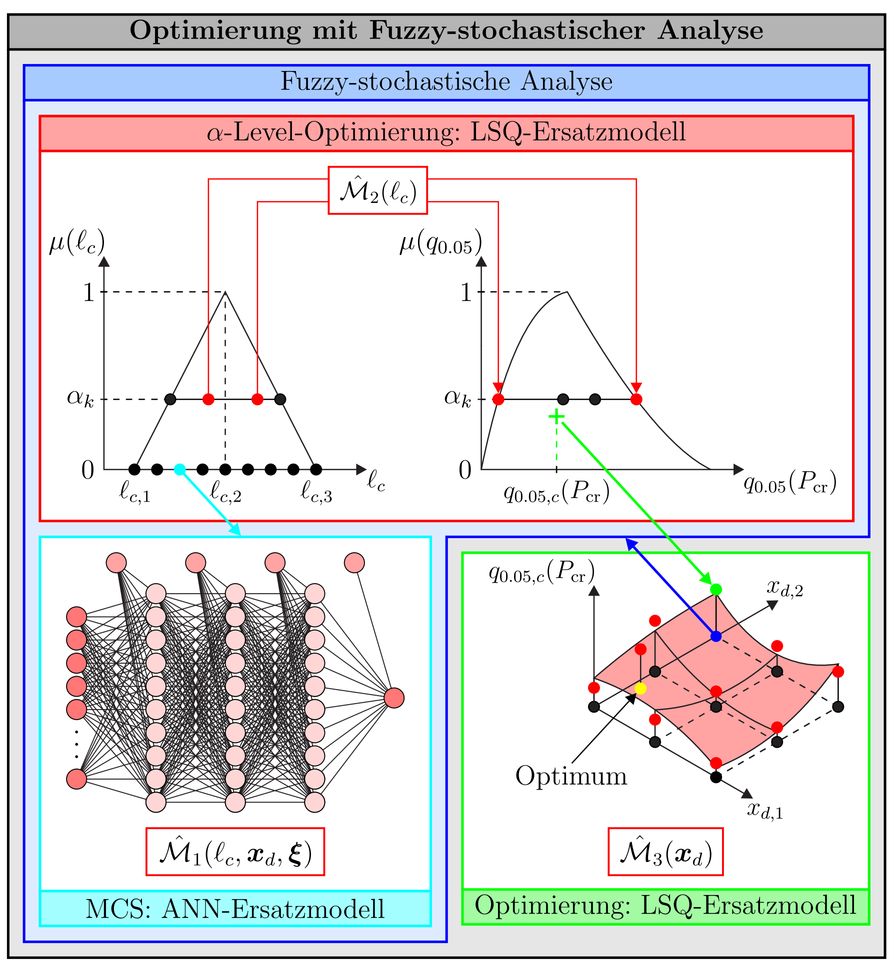

Abbildung 3: *Ablauf der Optimierung mit Fuzzy-stochastischer Analyse*

4. Numerisches Beispiel: Faserverbundplatte

Als Beispiel wird eine Faserverbundplatte mit interner Schichtung $[\pm\alpha]_{3s}$ gemäß Abbildung 4 untersucht, bei der die Gesamtdicke t und der Faserwinkel α optimiert werden.

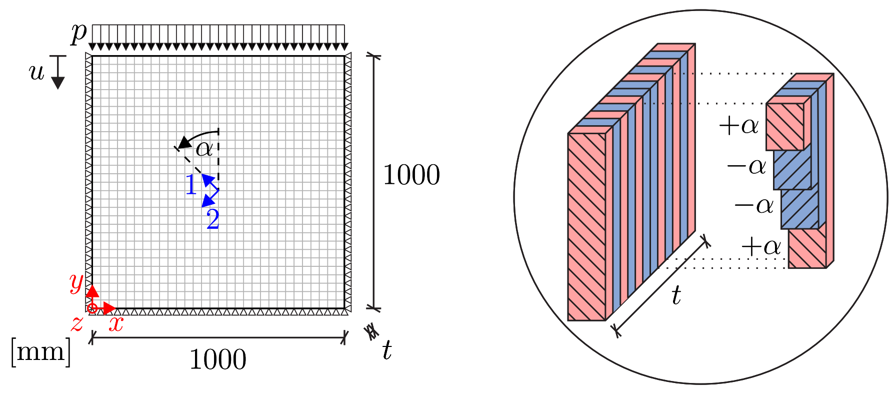

Abbildung 4: *FE-Modell der untersuchten Faserverbundplatte mit interner Schichtung*

Für die beiden Methoden Int1 und EWP wird jeweils ein ANN mit 10^4 Sets an Trainingsdaten trainiert. Anschließend wird mit beiden ANNs die Optimierung als Einzieloptimierung unter Nebenbedingung durchgeführt. Hierbei soll ein möglichst geringes Eigengewicht der Struktur erreicht werden, während das 5%-Quantil der kritischen Last den Schwellenwert von 500 N überschreiten soll. Beide Methoden ANN Int1 und ANN EWP finden ein vergleichbares Optimum von $t = 1{,}68$ mm und $\alpha = 31°$. Abbildung 5 zeigt die Optimierungsergebnisse der Methode ANN EWP.

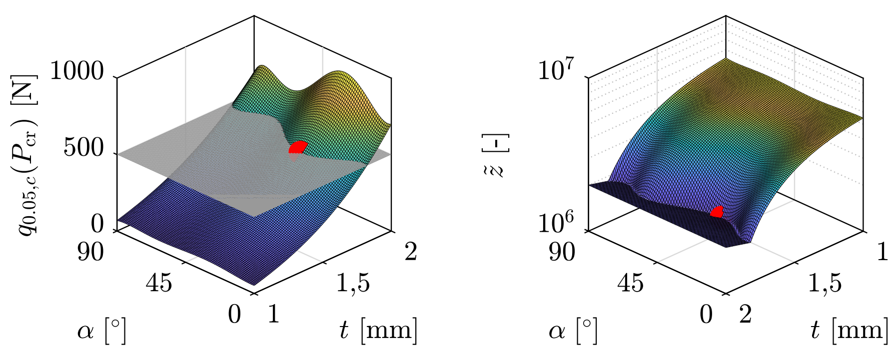

Abbildung 5: *Ergebnisse der Optimierung unter Nebenbedingung bei Einsatz der Methode ANN EWP*

Anschließend werden für das ermittelte Optimum die Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie die Fuzzy-Ergebnisgröße des 5%-Quantils der kritischen Last bestimmt. Gemäß Abbildung 6 liefern die beiden Methoden ANN Int1 und ANN EWP vergleichbare Ergebnisse, die im Wesentlichen mit den Ergebnissen einer vollständigen FE-Berechnung ohne ANN-Ersatzmodell übereinstimmen.

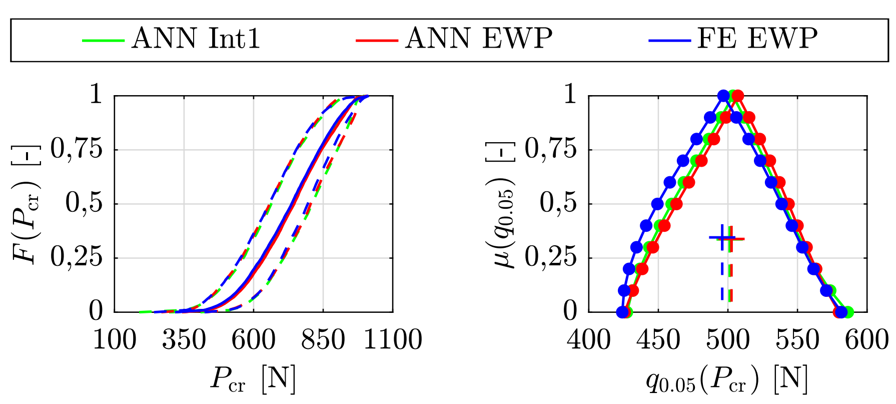

Abbildung 6: *Vergleich der Ergebnisse der Fuzzy-stochastischen Analyse am Optimum*