Programmierung eines dreidimensionalen finiten Elements mit transversal isotropem Stoffgesetz

Universität Karlsruhe (TH)

Diplomarbeit von Christian Bachmann

BAUSTATIK

Einleitung

Der Stofftensor eines Elements mit isotropem Stoffgesetz wird derart erweitert, dass damit transversal isotropes Werkstoffverhalten modellierbar ist.

Allgemeine Grundlagen

Ein transversal isotroper Werkstoff besitzt in einer Richtung ausgeprägte Eigenschaften und verhält sich in der Ebene senkrecht zu dieser Richtung isotrop, also richtungsunabhängig. Näherungsweise ist Holz ein solches Material.
Die Spannungen an dem Volumenteilchen eines Kontinuums werden mit dem 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\mathbf{S}$ angegeben und beziehen sich wie die Verzerrungen, die mit dem GREEN'schen Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ angegeben werden, auf den unverformten Zustand. In der Konstitutivgleichung

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\,\mathbf{E}$$

wird der lineare Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen durch den Stofftensor $\mathbf{C}$ angegeben. Die Koeffizienten C_{ij} werden durch die Ingenieurkonstanten bestimmt.
Die sechs voneinander unabhängigen Spannungen werden, wie auch die sechs voneinander unabhängigen Verzerrungen, in einem [6x1]-Vektor notiert:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}$$

Der symmetrische [6x6]-Stofftensor vereinfacht sich auf Grund der symmetrischen Eigenschaften eines transversal isotropen Materials zu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ S & Y & M & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}.$$

Der Koeffizienten des Stofftensors werden über von fünf voneinander unabhängigen Größen bestimmt.

Diese Materialparameter, auch Ingenieurkonstanten genannt, sind:

$$E_1,\ E_2,\ G_{12},\ \nu_{12},\ \nu_{23}$$

Dabei bezeichnet der Index 1 die Richtung der ausgeprägten Eigenschaften.

Numerisches Beispiel

Finite Elemente mit transversal isotropem Stoffgesetz finden breite Anwendung im Bereich der faserverstärkten Werkstoffe. Die hier vorgestellte Modellierung zeigt ein Kreuzgewebe unter einaxialer Zugbeanspruchung, das auch von Sprenger berechnet wird. Dabei sind die Fasern der oberen Schicht in Kraftrichtung angeordnet, die der unteren Schicht quer dazu.

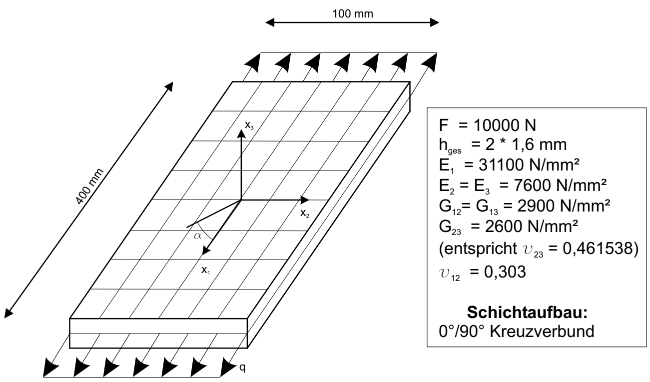

Abb. 1 Systemdaten des zugbeanspruchten Kreuzgewebes.

Da die Querkontraktion der oberen Schicht größer ist als die der unteren, kommt es zu einer Wölbung des Kreuzgewebes senkrecht zur Beanspruchungsrichtung:

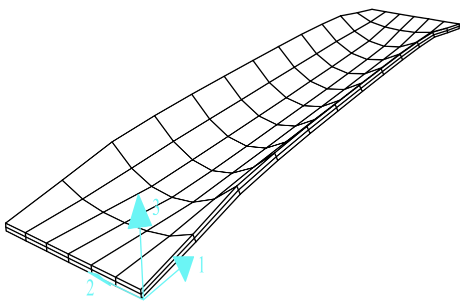

Abb.2 Querwölbung des Kreuzgewebes bei Zugbeanspruchung in 1-Richtung.

Der Vergleich mit den von Sprenger angegebene Ergebnissen zeigt die Funktionalität des Elements:

$\Delta x_{3,max}$	$\Delta x_{3,max}$ (Sprenger)	Abweichung [%]
$0,1893259$	$0,18887$	$0,24$