# Theorie und Numerik eines geometrisch nichtlinearen Volumenelementes mit quadratischen Ansatzfunktionen und EAS-Erweiterung

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Diplomarbeit von Markus Kollien

## Variationsformulierung

Die ENHANCED-ASSUMED-STRAIN-Methode wird auf ein Volumenelement mit quadratischen Ansatzfunktionen angewandt. Zum Zwecke der geometrisch nichtlinearen Berechnung erfolgt die Formulierung in konvektiven Koordinaten.

Mit der additiven Erweiterung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}$$

wird aus dem Dreifeldfunktional vom Hu-Washizu-Typ

$$\begin{aligned} \Pi_{en}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) \quad &= \quad \int_{\mathcal{B}_0} W_{0S}(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}V \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}A \end{aligned}$$

unter Einhaltung der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}V = 0$$

ein Zweifeldfunktional, mit der ersten Variation

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{en}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) \quad &= \quad \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta\tilde{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}V \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}A \end{aligned}$$

wobei die Spannungen, die sich aus der partiellen Ableitung der Formänderungsenergiefunktion ergeben, mit $\mathbf{S} = \partial W_{0S} / \partial \hat{\mathbf{E}}$ bezeichnet werden.

## Die EAS-Interpolationsmatrix

Zur Vermeidung von Versteifungsphänomenen werden Interpolationsmatrizen konstruiert. Volumetrische Versteifung tritt bei Elementen mit höherwertigen Ansatzfunktionen nicht auf. Um Schubversteifungen entgegen zu wirken, müssen quadratische Terme in die Matrix eingebracht werden. Dazu ist zur Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung die Modifikation $\tilde{\xi}^2 = 1 - 3\xi^2$ nötig; analog für $\eta$ und $\zeta$. Eine mögliche Kombination für die parasitären Schubspannungen $\tilde{E}_{12}$ ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{12} \quad \in \quad & \mathrm{span}\{\tilde{\xi}^2, \tilde{\eta}^2, \tilde{\zeta}^2, \tilde{\xi}^2\eta, \tilde{\xi}^2\zeta, \tilde{\eta}^2\xi, \tilde{\eta}^2\zeta, \\ & \tilde{\zeta}^2\xi, \tilde{\zeta}^2\eta, \tilde{\xi}^2\tilde{\eta}^2, \tilde{\xi}^2\tilde{\zeta}^2, \tilde{\eta}^2\tilde{\zeta}^2\} \quad . \end{aligned}$$

Für die Schubverzerrungen $\tilde{E}_{13}$ und $\tilde{E}_{23}$ kann derselbe Ansatz wie für $\tilde{E}_{12}$ benutzt werden.

## Die Gesamtsteifigkeitsmatrix

Im geometrisch nichtlinearen Falle wird ein Gleichungssystem mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren iterativ gelöst. Mit den Verschiebungen $\mathbf{v}$ und den internen Freiheitsgraden $\boldsymbol{\alpha}$ ergibt sich die konsistente Linearisierung zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_e^{uu} & \mathbf{K}_e^{\alpha u\,T} \\ \mathbf{K}_e^{\alpha u} & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{v}_e \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{f}_e^u \\ -\mathbf{f}_e^\alpha \end{pmatrix} \quad .$$

## Numerische Beispiele

Als geometrisch lineares Beispiel wird eine allseitig eingespannte Platte unter mittiger Einzellast betrachtet. Zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird ein Plattenviertel mit jeweils 108 Knoten diskretisiert.

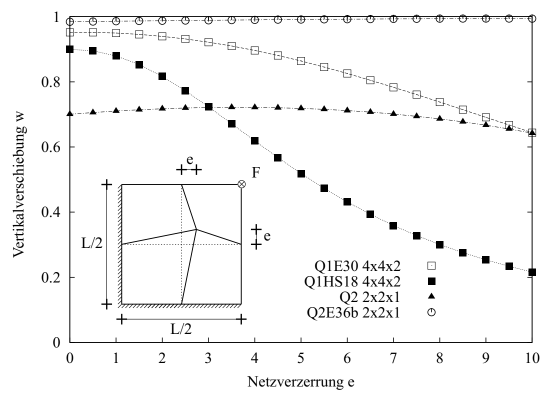


Abb.1 Platte unter Einzellast, Vertikalverschiebung über Netzverzerrung

In einem geometrisch nichtlinearen Beispiel wird der Nachteil der 27-Knoten-Elemente deutlich. Bei annähernd gleicher Knotenanzahl wie bei linearen Elementen ist das Q2E36b zwar besser als das quadratische Verschiebungselement, allerdings schlechter als die rechenzeitsparsameren Q1-EAS bzw. HS-Elemente.

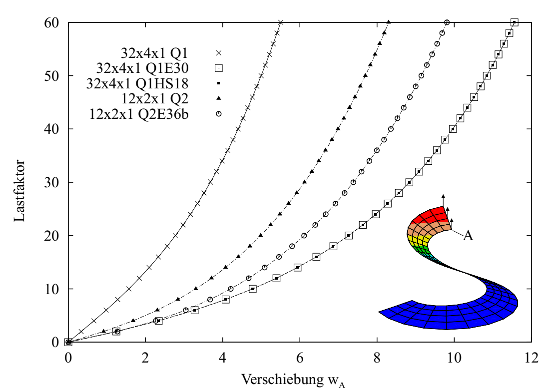


Abb.2 Ringplatte, Last über Vertikalverschiebung